LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE

Premier énoncé : cas d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.

Alors : $$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration :

Supposons $f = 1$ sur $[a, b]$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda b} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda a}}{\mathbf{i}\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Alors, si $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{]a_{i-1}, a_i[}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

D'où, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Supposons enfin f continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ pour la norme uniforme, il existe $e : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que :

$$\|f - e\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Écrivons : $$f = (f - e) + e$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} (f(t) - e(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t) - e(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f - e\|_\infty (b - a) \leqslant \varepsilon(b - a)$$

Et d'autre part, comme e est en escalier, on a :

$$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} e(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

C'est-à-dire : $$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\lambda \geqslant \lambda_0 \Rightarrow \left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} e(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

On en déduit que pour tout λ tel que $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, on a :

$$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(b - a) + \varepsilon$$

Ce qui signifie bien : $$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Remarques :

- Ce raisonnement fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$.
- Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, une simple intégration par parties suffit à prouver le lemme (voir énoncé 2)
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, le passage à la partie réelle et à la partie imaginaire donne :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Deuxième énoncé : cas d'une fonction de classe C^1

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.

Alors :
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Démonstration :

Les applications f et $t \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t) \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}}{\mathbf{i}\lambda} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}}{\mathbf{i}\lambda} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathbf{i}\lambda} \left[f(b)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda b} - f(a)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda a} - \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t \right]$$

D'où :

$$\left| \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \right]$$

Notons $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$ (existe car, par hypothèse, f' est continue sur le compact $[a, b]$)

Ainsi :

$$0 \leqslant \left| \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + (b-a)M \right]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$