SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE

On présente ici diverses méthodes qui établissent le résultat :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

On précise, au préalable, que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ relève du théorème spécial à certaines séries alternées (T.S.C.S.A.). C'est-à-dire vérifie les trois hypothèses :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$

(ii) la suite $(|u_n|)_{n\,\geqslant\,1}$ est décroissante

(iii) la suite $(u_n)_{n\,\geqslant\,1}$ tend vers 0

En conséquence la série considérée est bien convergente.

Ceci dit, certaines des méthodes ci-dessous redémontrent ce résultat.

1. Intégration d'une série géométrique

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$S_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{p}}{p+1}$$

L'astuce est de remarquer que : $$\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t$$

On a alors : $$S_n = \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^1(-t)^p\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{p=0}^{n-1}(-t)^p\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $$\sum_{p=0}^{n-1}(-t)^p = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

D'où : $$S_n = \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$$

On a donc : $$|S_n - \ln 2| \leqslant \left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $$\frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 : $$\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

Et comme : $$\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a donc : $$|S_n - \ln 2| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En conséquence S_n admet bien une limite et : $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$$

On a prouvé : $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2. Utilisation d'un développement en série entière avec étude sur le cercle de convergence

On utilise ici le développement en série entière en 0 de l'application :

$$x \longmapsto \ln(1 + x)$$

On sait que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ et :

$$\forall x \in\,]-1, 1[,\ \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

On a déjà dit, plus haut, que cette somme est convergente encore en $x = 1$.

Ceci dit, nous avons besoin d'un argument de continuité (en 1) pour affirmer que la somme (pour x fixé égal à 1) est égale à ln 2.

Pour cela, nous allons montrer que la série (d'applications) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur [0, 1].

En effet, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge d'après le T.S.C.S.A..

On a alors la majoration du reste suivante :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k\geqslant n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En conséquence :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ce qui prouve que la suite des restes converge uniformément vers 0 sur [0, 1], donc la série d'application $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur [0, 1] et donc, par continuité de sa somme sur [0, 1], on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

<u>Remarque</u> : on pouvait également utiliser le théorème de continuité radiale

3. Utilisation d'un théorème d'interversion des symboles

On considère la suite d'application $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur [0, 1] par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 + x}$$

Nous allons prouver que $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite (lorsque n tend l'infini) que nous calculerons.

On constate, dans un premier temps, que la suite (f_n) converge simplement sur [0, 1] vers l'application f

définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Comme f n'est manifestement pas continue en 1, les théorèmes classiques ne s'appliquent pas.

Nous allons vérifier les différentes hypothèses du théorème de convergence dominée :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur [0, 1] (et donc localement intégrable sur [0, 1])

(ii) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une application f continue par morceaux sur [0, 1]

(iii) hypothèse de domination : il existe une application φ (à savoir $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ pour $x \in [0, 1]$) positive, continue (par morceaux) et donc intégrable sur [0, 1] telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi \text{ sur } [0, 1]$$

Du théorème de convergence dominée pour l'intégration sur un segment, des suites d'applications convergeant simplement, on déduit :

$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite et : $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

On a donc : $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$$

<u>Remarque</u> : on pouvait aussi utiliser le théorème de convergence monotone.

Maintenant, nous allons calculer cette limite différemment, en remarquant que :

$$\forall x \in [0, 1[,\ f_n(x) = \frac{1-x^{2n+2}}{1+x} = (1-x)\,\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} = (1-x)\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k$$

On constate, a posteriori, que le premier et le dernier membre ci-dessus sont encore égaux si $x = 1$.

On a donc :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^{2k} - x^{2k+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

Ce qui prouve bien que : $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

4. Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

On considère l'application : $$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \ln(1+x)$$

f est de classe C^∞ sur [0, 1] et : $$\forall x \in [0, 1],\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

On montre alors, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\wp(k) : \forall x \in [0, 1],\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

- Le calcul de f' ci-dessus montre qu'on a $\wp(1)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$:

$$\forall x \in [0, 1],\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

En dérivant, on obtient : $\forall x \in [0, 1],\ f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$

D'où $\wp(k+1)$.

On a montré : $\wp(1)$ et $(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \wp(k) \Rightarrow \wp(k+1))$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \wp(k)$$

C'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$

Comme f est de classe C^∞, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sur l'intervalle $[0, 1]$ permet d'écrire :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}$$

Où M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[0, 1]$. Avec $M = n!$, et tenant compte du fait que $f(0) = 0$, on obtient :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que la série harmonique alternée converge bien et que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

5. Utilisation d'un développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique

On sait que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

De même : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln (2n) + \gamma + o(1)$

Par différence, il vient : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 + o(1)$

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\wp(n) :\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

- Comme $\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$, on a $\wp(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

  Alors :

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

D'où $\wp(n+1)$.

On a montré : $$\wp(1) \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \wp(n)\ \Rightarrow\ \wp(n+1))$$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \wp(n)$$

C'est-à-dire : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

On a donc : $$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2+o(1)$$

D'où, par passage à la limite : $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$$

6. Utilisation d'une somme de Riemann

On a vu que : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Égalité qui s'écrit encore : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

On reconnaît, dans le second membre, une somme de Riemann qui se calcule ainsi :

On considère l'application f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

On a alors : $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2$$

D'où : $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$$

7. Utilisation du théorème des suites adjacentes

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $$S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{p+1}$$

Et : $$u_n=S_{2n}\ \text{ et }\ v_n=S_{2n+1}$$

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n-u_n=S_{2n+1}-S_{2n}=\frac{1}{2n+1}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0$$

$$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$$

$$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leqslant 0$$

Ce qui prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Notons ℓ leur limite commune.

Comme les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ, il en va de même de (S_n).

Montrons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \qquad (\ast)$$

Il suffit d'étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1}$$

Or : $$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$$

D'où : $$f'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x} \geqslant 0$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ce qui prouve la première inégalité de $(\ast)$.

On montre, de même, la seconde inégalité de $(\ast)$ en étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} - \ln(1+x)$$

En particularisant $x = 1$ dans $(\ast)$, on obtient :

$$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$$

Et comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, un passage à la limite donne :

$$\ell = \ln 2$$

D'où : $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$