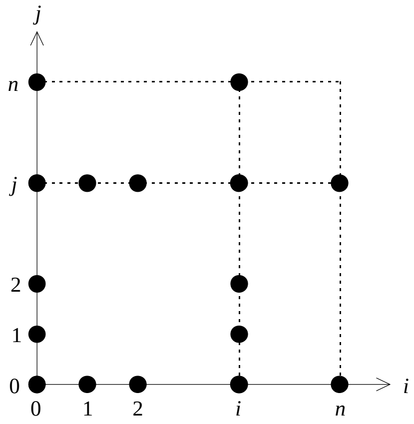
1) Sommations sur un carré



Considérons le "carré" C de $\mathbb{N}^2$ défini par :

$$C = \{(i\ ;\ j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant n\}$$

Soit $(a_{ij})_{(i\ ;\ j)\in C}$ une famille de nombres.

Somme des (a_{ij}) suivant les colonnes :

(On fait varier l'indice de colonne i)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

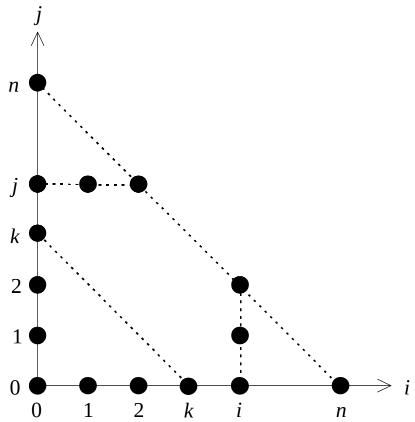
Somme des (a_{ij}) suivant les lignes :

(On fait varier l'indice de ligne j)

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}$$

Bilan : $$\sum_{(i,j)\in C} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}$$

2) Sommations sur un triangle



Considérons le "triangle" T de $\mathbb{N}^2$ défini par :

$$T = \{(i\ ;\ j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant i + j \leqslant n\}$$

Soit $(a_{ij})_{(i\ ;\ j)\in C}$ une famille de nombres.

Somme des (a_{ij}) suivant les colonnes :

(On fait varier l'indice de colonne i)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}$$

Somme des (a_{ij}) suivant les lignes :

(On fait varier l'indice de ligne j)

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} a_{ij}$$

Somme des (a_{ij}) suivant les diagonales

(On utilise un nouvel indice k de diagonale)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_{ij}$$

Bilan : $$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} a_{ij} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_{ij}$$