Théorème *Théorème spécial à certaines séries dites alternées*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série vérifiant les conditions suivantes :

i) (u_n) est à signes alternés : $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n\,|u_n|)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n|)$

ii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

iii) la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors dans ces conditions :

la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et son reste $R_n = \sum_{k\geqslant n+1} u_k$ vérifie :

$$\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

Démonstration :

Posons : $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On suppose que : $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n\,|u_n|$$

(Le cas $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n|$ est analogue)

Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = S_{2n+1} \text{ et } b_n = S_{2n}$$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

Donc $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n \geqslant 0$$

La suite (a_n) est croissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

Donc $$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n \leqslant 0$$

La suite (b_n) est décroissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Notons S leur limite commune. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3} \leqslant S \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, on déduit :

$$u_{2n+1} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$, on déduit :

$$0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$$

On a donc :
$$(\circledast) \quad \begin{cases} u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \\ 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2} \end{cases}$$

Ceci prouve déjà :
$$\operatorname{sgn}(R_{2n}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+1}) = \text{négatif}$$

$$\operatorname{sgn}(R_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+2}) = \text{positif}$$

On peut donc affirmer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(u_{n+1})$$

De plus, en passant aux valeurs absolues dans ($\circledast$), il vient :

$$\begin{cases} 0 \leqslant | R_{2n} | \leqslant | u_{2n+1} | \\ 0 \leqslant | R_{2n+1} | \leqslant | u_{2n+2} | \end{cases}$$

On peut donc affirmer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$