

Règle d'Abel pour les séries

Soit (ε_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

Soit (a_n) une suite de complexes telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{p=0}^n a_p \right| \leq M$$

(Majoration des sommes partielles)

Alors la série de terme général $\varepsilon_n a_n$ est convergente.

Démonstration :

Posons :

$$A_n = \sum_{p=0}^n a_p$$

Ainsi :

$$A_0 = a_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, a_p = A_p - A_{p-1}$$

Posons également :

$$S_n = \sum_{p=0}^n \varepsilon_p a_p$$

Nous allons montrer que la suite (S_n) converge :

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^n \varepsilon_p (A_p - A_{p-1})$$

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^n \varepsilon_p A_p - \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_{p+1} A_p$$

$$S_n = \varepsilon_n A_n + \sum_{p=0}^{n-1} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) A_p$$

Cette dernière écriture est souvent appelée "transformation d'Abel". On notera l'analogie avec une intégration par parties.

- La suite (A_n) est bornée et la suite (ε_n) converge vers 0 donc la suite $(\varepsilon_n A_n)$ converge aussi vers 0.

- De plus :

$$\sum_{p=0}^{n-1} |\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}| |A_p| \leq M(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) \leq M\varepsilon_0$$

La série de terme général $(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1})A_p$ est donc absolument convergente, donc convergente (car \mathbb{C} est complet)

On en déduit la convergence de la suite (S_n) , c'est-à-dire la convergence de la série de terme général $\varepsilon_n a_n$.

Application :

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = e^{in\theta} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{1}{n}$$

Il est clair que la suite (ε_n) est strictement positive, décroissante et tendant vers 0.

Montrons que les sommes $\left| \sum_{p=1}^n a_p \right|$ sont majorées :

$$\sum_{p=1}^n e^{ip\theta} = \sum_{p=1}^n (e^{i\theta})^p \stackrel{e^{i\theta} \neq 1}{=} \frac{e^{i\theta}(e^{in\theta} - 1)}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta} e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)} = \frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où :

$$\left| \sum_{p=1}^n e^{ip\theta} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}$$

D'après la règle d'Abel, on déduit la convergence de la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n}$.

Règle d'Abel pour les intégrales

Soient $a \in \mathbb{R}$, f (resp. g) une application de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) tels que :

- i) f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$
- ii) f est décroissante et de limite nulle en $+\infty$
- iii) g est continue sur $[a, +\infty[$
- iv) g vérifie la condition :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2, \left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq M$$

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.

Démonstration :

On utilise le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et x et y dans $[a, +\infty[$ avec $x < y$.

Notons G la primitive de g qui s'annule en a :

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

Critère de Cauchy pour les intégrales impropres :

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in [a, +\infty[, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2,$$

$$y > x \geq K \Rightarrow \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

D'après les hypothèses i) et iii), on peut procéder à l'intégration par parties suivante :

$$\int_x^y f(t)g(t) dt = [f(t)G(t)]_x^y - \int_x^y f'(t)G(t) dt$$

D'après l'hypothèse iv) :

$$\forall (u, v) \in ([a, +\infty[)^2, \left| \int_u^v f(t)g(t) dt \right| \leq M$$

Donc en particulier :

$$\forall v \in [a, +\infty[, \left| \int_a^v f(t)g(t) dt \right| \leq M$$

Donc :

$$\forall t \in [x, y] \subset [a, +\infty[, G(t) \leq M$$

D'où :

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M(|f(x)| + |f(y)|) + M \int_x^y |f'(t)| dt$$

Et comme d'après iii), f est positive sur $[a, +\infty[$ et f' négative sur $[a, +\infty[$:

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M(f(x) + f(y)) - A(f(y) - f(x)) \leq 2Mf(x)$$

Mais comme f tend vers 0 en $+\infty$, on a :

$$\exists K \in [a, +\infty[, \forall x \in [a, +\infty[, (x \geq K \Rightarrow 2Mf(x) \leq \varepsilon)$$

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in [a, +\infty[, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2, (y > x \geq K \Rightarrow \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve (via le critère de Cauchy), la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$.

Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de l'intégrale impropre : $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$

- $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, décroissante et de limite nulle.
- $g : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in ([1, +\infty[)^2, \left| \int_x^y g(t) dt \right| = \left| \int_x^y e^{it} dt \right| = \left| \frac{e^{iy} - e^{ix}}{i} \right| \leq 2$$

Donc l'intégrale impropre I_α est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : on retrouve évidemment ce résultat par une intégration par parties :

On a :

$$\left| \frac{e^{it}}{t^\alpha} \right| = \frac{1}{t^\alpha}$$

Donc l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Recherche du domaine de convergence :

Une intégration par parties donne :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \left[\frac{e^{it}}{it^\alpha} \right]_1^x + \frac{\alpha}{i} \int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$$

Comme $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, le crochet tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De plus l'intégrale $\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$ converge car

l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, I_\alpha \text{ converge}$$