Théorème

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Les démonstrations données ci-dessous font appel au *raisonnement par l'absurde*. Plus précisément : si on suppose l'existence d'un polynôme P non constant et sans racines, alors on aboutit à une contradiction.

Démonstration 1 : utilisant l'**identité de Taylor pour les polynômes**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec P **non constant et sans racines (dans $\mathbb{C}$).**

On note encore P l'application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée au polynôme P.

Comme P est non nul (puisque **non constant**), on peut noter $n = \deg P$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons également :
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec } a_n \neq 0$$

Considérons l'application :
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ z &\longmapsto |P(z)| \end{aligned}$$

On a :

(1) : φ est continue sur $\mathbb{C}$.

(2) : $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \varphi(z) = +\infty$.

(3) : φ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint son minimum

Preuve :

(1) : L'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est continue car polynomiale.

L'application "module" :
$$|\,.\,| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

l'est également. En effet, nous savons que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$$\text{Si } |x - y| \leqslant \varepsilon \text{ alors } \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant \varepsilon$$

On a donc bien :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ (à savoir } \eta = 1),\ \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ (|x - y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \big||x| - |y|\big| \leqslant \varepsilon)$$

Ce qui prouve que l'application "module" est uniformément continue, donc continue sur $\mathbb{C}$.

Par composition d'applications continues, on déduit la continuité de φ.

(2) : Comme $n \in \mathbb{N}^*$, car P est supposé **non constant**, on peut écrire, pour $z \neq 0$:
$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right)$$

Or, on sait que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ |x + y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$$

D'où : $$|P(z)| \geqslant |z|^n\left(|a_n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{z^{n-k}}\right|\right) \geqslant |z|^n\left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|z|^{n-k}}\right)$$

Et comme $n - k > 0$, on a : $$\lim_{|z|\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} = 0$$

Par conséquent, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{|a_n|}{2}$:

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| \geqslant A \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \leqslant \frac{|a_n|}{2}\right)$$

D'où: $$|z| \geqslant A \Rightarrow |P(z)| \geqslant |z|^n\frac{|a_n|}{2}$$

Enfin, comme : $$\lim_{|z|\to+\infty}|z|^n = +\infty$$

On déduit, par comparaison : $$\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)| = +\infty$$

D'où (2) : $$\lim_{|z|\to+\infty}\varphi(z) = +\infty$$

(3) : Le résultat (2) s'écrit encore :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| \geqslant B \Rightarrow \varphi(z) \geqslant A)$$

En particulier pour $A = \varphi(0)$: $\exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| \geqslant B \Rightarrow \varphi(z) \geqslant \varphi(0))$

D'après (1), φ est continue sur $\mathbb{C}$ donc sur le compact $D = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leqslant B\}$. Donc φ est bornée sur D et atteint ses bornes :

$$\exists z_0 \in D,\ \varphi(z_0) = \inf_{z\in D}\varphi(z)$$

Comme $0 \in D$, on a donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| \geqslant B \Rightarrow \varphi(z) \geqslant \varphi(0) \geqslant \varphi(z_0))$

D'où : $$\varphi(z_0) = \inf_{z\in\mathbb{C}}\varphi(z)$$

Ce qui prouve (3) : φ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint son minimum

Venons-en maintenant au cœur de la démonstration.

Nous allons montrer qu'il existe un complexe z tel que $\varphi(z) < \varphi(z_0)$.

Appliquons l'identité de Taylor pour les polynômes :

$$\forall h \in \mathbb{C},\ P(z_0 + h) = P(z_0) + P'(z_0)h + \dots + \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}h^n$$

Comme P est supposé **sans racines** : $P(z_0) \neq 0$

En outre, comme P est de degré n : $P^{(n)}(z_0) = n!\, a_n \neq 0$

Les nombres $P^{(j)}(z_0)$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, ne sont donc pas tous nuls.

Soit k le plus petit entier tel que $P^{(k)}(z_0) \neq 0$. (Cet entier existe car $n \geqslant 1$ puisque P est **non constant**)

On a alors : $$\forall h \in \mathbb{C}^*,\ \frac{P(z_0 + h)}{P(z_0)} = 1 + \frac{P^{(k)}(z_0)}{P(z_0)\,k!}h^k + \dots + \frac{P^{(n)}(z_0)}{P(z_0)\,n!}h^n$$

Posons, pour $j \in [\![k, n]\!]$: $$a_j = \frac{P^{(j)}(z_0)}{P(z_0)\, j!}$$

Ainsi : $$\forall h \in \mathbb{C}^*,\ \frac{P(z_0+h)}{P(z_0)} = 1 + a_k h^k + \sum_{j=k+1}^{n} a_j h^j$$

Distinguons deux cas :

Cas 1 : $k < n$

Écrivons : $h = \rho\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $a_k = r_k\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha_k}$ (avec $\rho > 0$ et $r_k > 0$ car $P^{(k)}(z_0) \neq 0$)

Ainsi : $$\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*, \forall \theta \in [0, 2\pi[,\ \frac{P(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{P(z_0)} = 1 + r_k\rho^k\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}(k\theta+\alpha_k)} + \sum_{j=k+1}^{n} r_j\rho^j\mathbf{e}^{\mathbf{i}(j\theta+\alpha_j)}$$

L'idée est de choisir θ tel que : $$k\theta + \alpha_k = \pi$$

Ainsi : $$\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{P(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{P(z_0)} = 1 - r_k\rho^k + \sum_{j=k+1}^{n} r_j\rho^j\mathbf{e}^{\mathbf{i}(j\theta+\alpha_j)}$$

Par passage au module : $$\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\varphi(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{\varphi(z_0)} \leqslant |1 - r_k\rho^k| + \sum_{j=k+1}^{n} r_j\rho^j$$

Posons $M = \max\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n} r_j$, ainsi :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\varphi(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{\varphi(z_0)} \leqslant |1 - r_k\rho^k| + M \sum_{j=k+1}^{n} \rho^j$$

En choisissant ρ inférieur à 1, on a : $$\sum_{j=k+1}^{n} \rho^j \leqslant \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho}$$

D'où, pour $\rho \in\ ]0, 1[$: $$\frac{\varphi(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{\varphi(z_0)} \leqslant |1 - r_k\rho^k| + \frac{M\rho^{k+1}}{1-\rho}$$

Comme $r_k > 0$ et $\rho > 0$, on a : $$|1 - r_k\rho^k| < 1$$

Par ailleurs : $$\lim_{\rho\to 0} \frac{M\rho^{k+1}}{1-\rho} = 0$$

Et en choisissant ρ assez petit, on a donc : $$|1 - r_k\rho^k| + \frac{M\rho^{k+1}}{1-\rho} < 1$$

D'où $$\varphi(z_0 + \rho\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) < \varphi(z_0)$$

Cas 2 : $k = n$

Alors, en reprenant les notations ci-dessus :

$$\frac{\varphi(z_0+\rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{\varphi(z_0)} \leqslant |1 - r_k\rho^k| < 1$$

D'où $$\varphi(z_0 + \rho\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) < \varphi(z_0)$$

Dans tous les cas, on a contredit la condition : $\varphi(z_0) = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} \varphi(z)$

D'où le théorème de D'Alembert.

Démonstration 2 : utilisant un **développement en série entière**

Lemme : (formules de Cauchy)

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

On pose : $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in\ ]0, R[,\ I_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Alors : $$I_n(r) = a_n r^n$$

Preuve du lemme :

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeant uniformément sur le disque de centre 0 et da rayon r, on peut permuter les symboles $\int$ et $\sum$ d'où :

$$I_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}^{\mathbf{i}(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Or, $$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}^{\mathbf{i}(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{kn}$$

D'où $$I_n(r) = a_n r^n$$

En particulier : $$I_0(r) = a_0$$

Ce qui prouve le lemme.

Corollaire : (Théorème de Liouville)

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$:

Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante !

Preuve :

Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors on peut définir :

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$$

Dans ce cas, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}_+,\ |I_n(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \times \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathbf{e}^{-\mathbf{i}n\theta}\right| \mathrm{d}\theta = \|f\|_\infty$$

C'est-à-dire, d'après le lemme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}_+,\ a_n r^n \leqslant \|f\|_\infty$$

Donc, pour $n \geqslant 1$, en faisant tendre r vers $+\infty$, il apparaît que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = 0$$

D'où $$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a_0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{C}$.

On en déduit le théorème de D'Alembert :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et sans racines. On peut alors définir la fraction rationnelle $f = \dfrac{1}{P}$.

D'après nos hypothèses, f est bornée car P est supposé sans racines.

De plus, comme P ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{C}$, donc holomorphe donc analytique.

Donc f est développable en série entière avec $R = +\infty$.

Et d'après le théorème de Liouville, f et donc P est constant. Contradiction.