

Lemme Test de *comparaison logarithmique*

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **strictement positifs** tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors :

1. Si $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de $\sum u_n$.
2. Si $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de $\sum v_n$.

Preuve :

Puisque u_n et v_n sont strictement positifs, on a : $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et par récurrence immédiate : $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}$.

En posant $\lambda = \frac{u_0}{v_0}$, il vient $u_n \leq \lambda v_n$.

Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en va de même de $\lambda \sum v_n$ d'où 1.

2. est la contraposée de 1.

Ce critère de comparaison sera utile dans la démonstration de la règle de d'Alembert et celle de Raabe-Duhamel.

Remarque : ce résultat reste encore valable avec la condition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n})$$

Règle de d'Alembert

Soit une série de terme général u_n **strictement positif** :

- 1) S'il existe un réel $q < 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, la série $\sum u_n$ est convergente.
- 2) S'il existe un réel $q \geq 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$, la série $\sum u_n$ est divergente.
- 3) En particulier, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors :
 - Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
 - Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
 - Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure (sauf si $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$ auquel cas la série est trivialement divergente)

Preuve :

1) Posons $v_n = q^n$ ($q < 1$). Ainsi $\sum v_n$ est convergente. Or $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

D'après le lemme, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

2) Idem mais cette fois-ci ($q \geq 1$) $\sum v_n$ diverge et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Donc toujours d'après le lemme, la série $\sum u_n$ est divergente.

3) • Si $\ell < 1$ alors soit q tel que $\ell < q < 1$. Pour $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, d'où le résultat d'après 1.

• Si $\ell > 1$ alors soit q tel que $1 < q < \ell$. Pour $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$, d'où le résultat d'après 2.

• Si $\ell = 1$. Considérons la série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$.

Or, la série donnée converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$. On ne peut donc pas conclure.

Exemples :

• $u_n = \frac{x^n}{n!}$ ($x > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$ donc $\sum u_n$ converge. Et donc $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$!

• $u_n = \frac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}}$ ($x > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2n+1} + x}{x^{2n+2} + 1} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < 1 \text{ si } x > 1 \text{ donc } \sum u_n \text{ converge} \\ 1 \text{ si } x = 1 \text{ mais alors } u_n = \frac{1}{2} \text{ donc } \sum u_n \text{ diverge} \\ x < 1 \text{ si } x < 1 \text{ donc } \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$

• $u_n = \frac{n!}{n^n}$ ($n > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ donc $\sum u_n$ converge. Et donc $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$!

Règle de Cauchy

Soit une série de terme général u_n **strictement positif** :

On évitera de parler de "critère de Cauchy" par risque de confusion avec le critère de convergence de Cauchy de la série vue comme une suite...

1) S'il existe un réel $q < 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{u_n} \leq q$, la $\sum u_n$ est convergente.

2) S'il existe un réel $q \geq 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{u_n} \geq q$, la $\sum u_n$ est divergente (trivialement).

3) En particulier, si u_n a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure (sauf si $\forall n \geq n_0, u_n \geq 1$ auquel cas la série est trivialement divergente)

Preuve :

Pour 1 (resp. 2), on a $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ (resp. $\sqrt[n]{u_n} \geq q$) qui équivaut à $u_n \leq q^n$ (resp. $u_n \geq q^n$) d'où le résultat.

Pour 3, on procède comme pour la règle de d'Alembert :

• Si $\ell < 1$ alors soit q tel que $\ell < q < 1$. Pour $n \geq n_0$, on a : $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, d'où le résultat d'après 1.

- Si $\ell > 1$ alors soit q tel que $1 < q < \ell$. Pour $n \geq n_0$, on a : $\sqrt[q]{u_n} \geq q$, d'où le résultat d'après 2.
- Si $\ell = 1$. Considérons la série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha/n}} = 1$.

Or, la série donnée converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$. On ne peut donc pas conclure.

Exemples :

- $u_n = \frac{n^k}{2^n}$ ($k \in \mathbb{R}$). On a $\sqrt[q]{u_n} = \frac{(\sqrt[q]{n})^k}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ donc $\sum u_n$ converge
- $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. On a $\sqrt[q]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ donc $\sum u_n$ converge
- $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$. On a $\sqrt[q]{u_n} = \frac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)} = \frac{e^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}}{\ln(n)} \rightarrow 0$ donc $\sum u_n$ converge

Proposition Comparaison entre les règles de D'Alembert et de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**.

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ a une limite } \ell \text{ alors } \sqrt[q]{u_n} \text{ admet la même limite } \ell.$$

Moralité : si la règle de D'Alembert conduit au cas $\ell = 1$, il en sera de même pour la règle de Cauchy.

Cependant, la réciproque est fautive, comme le montre le contre-exemple suivant :

Considérer la série de terme général : $u_n = 2^{(-1)^n - n}$

On a :
$$\sqrt[q]{u_n} = 2^{\frac{(-1)^n}{n} - 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Mais : si n est pair : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-1-(n+1)}}{2^{1-n}} = \frac{1}{8}$ et si n est impair : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{1-(n+1)}}{2^{-1-n}} = 2$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'admet pas de limite.

Preuve de la proposition :

On a donc :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon)$$

Supposons $\ell > 0$.

Pour $\varepsilon < \ell$, on a :
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow 0 < \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon)$$

En remarquant que, pour $n > N$:
$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{p=N}^{n-1} \frac{u_{p+1}}{u_p} \quad (\text{produit de } n - N \text{ facteurs})$$

Comme $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow 0 < (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq \frac{u_n}{u_N} \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N})$$

D'où :
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow 0 < u_N(\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N(\ell + \varepsilon)^{n-N})$$

Par croissance de l'application $t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha \geq 0$) sur \mathbb{R}_+^* , nous avons (avec $\alpha = \frac{1}{n}$) :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{u_N} (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{u_N} (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}})$$

Or,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_N} (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} = \ell - \varepsilon \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_N} (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} = \ell + \varepsilon \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} u_N} = 1)$$

Donc :
$$\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow |\sqrt[n]{u_N} (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell - \varepsilon)| \leq \varepsilon \text{ et } |\sqrt[n]{u_N} (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell + \varepsilon)| \leq \varepsilon)$$

Pour $n > \max(N, N')$, on a alors :
$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, il vient :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

Enfin, si $\ell = 0$, on reprend le même raisonnement en remplaçant, dans les encadrements ci-dessus, le membre de gauche par 0.