

## LES APPLICATIONS SURJECTIVES

### Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  un élément de  $F^E$ . L'application  $f$  est dite surjective lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

On dit également que  $f$  est une surjection de  $E$  sur  $F$ .

### Dénombrement des surjections lorsque $E$ et $F$ sont de cardinal finis :

Notons  $n = \text{Card}(E)$  et  $p = \text{Card}(F)$  et  $S(n, p)$  le nombre de surjections de  $E$  sur  $F$ .

Si  $p > n$ , il est clair que  $S(n, p) = 0$ .

Si  $n \geq p$ . Que vaut  $S(n, p)$  ?

Pour définir une surjection de  $E$  sur  $F$ , il suffit de se donner une partition de  $E$  en  $p$  sous-ensembles non vides, puis une bijection de l'ensemble de ces  $p$  sous ensembles sur  $F$ . D'après le principe multiplicatif, on a donc :

$$S(n, p) = S_n^p p!$$

où  $S_n^p$  désigne le nombre de partitions de  $E$  en  $p$  sous ensembles non vides ( $p$ -partitions)

Les nombres  $S_n^p$  (dits de Stirling de 2<sup>ème</sup> espèce) vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S_{n+1}^p = S_n^{p-1} + p S_n^p$$

En effet, considérons un ensemble  $X$  de cardinal  $n + 1$  :  $X = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n ; x_{n+1}\}$

Le nombre de  $p$ -partitions de  $X$  se répartissent en deux catégories :

- Celles qui contiennent le singleton  $\{x_{n+1}\}$ .

Il y en a :  $S_n^{p-1}$  (nombre de  $(p - 1)$ -partitions de  $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ )

- Celles qui ne contiennent pas le singleton  $\{x_{n+1}\}$ .

Il y a  $S_n^p$   $p$ -partitions de  $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$  et  $p$  possibilités d'y adjoindre l'élément  $x_{n+1}$ .

Soit au total :  $p S_n^p$ .

D'après le principe de la somme, on a bien :  $S_{n+1}^p = S_n^{p-1} + p S_n^p$  (Et, naturellement :  $S_n^1 = S_n^n = 1$ )

On en déduit, en multipliant par  $p!$ , une relation de récurrence entre les nombres  $S(n, p)$  :

$$p! S_{n+1}^p = p! S_n^{p-1} + p! p S_n^p$$

$$S(n+1, p) = p[S(n, p-1) + S(n, p)]$$

Tableau des nombres de Stirling de 2<sup>ème</sup> espèce : (en italique, les nombres  $S(n ; p)$ )

Dans la dernière colonne figurent les nombres de BELL qui représentent le nombre total de partitions de  $E$  :

$$B_n = \sum_{p=1}^n S_n^p$$

$p$ $n$	1	2	3	4	5	6	7	Nombres de BELL
1	1 <i>1</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	$B_1 = 1$
2	1 <i>1</i>	1 <i>2</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	$B_2 = 2$
3	1 <i>1</i>	3 <i>6</i>	1 <i>6</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	$B_3 = 5$
4	1 <i>1</i>	7 <i>14</i>	6 <i>36</i>	1 <i>24</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	$B_4 = 15$
5	1 <i>1</i>	15 <i>30</i>	25 <i>150</i>	10 <i>240</i>	1 <i>120</i>	0 <i>0</i>	0 <i>0</i>	$B_5 = 52$
6	1 <i>1</i>	31 <i>62</i>	90 <i>540</i>	65 <i>1560</i>	15 <i>1800</i>	1 <i>720</i>	0 <i>0</i>	$B_6 = 203$
7	1 <i>1</i>	63 <i>126</i>	301 <i>1806</i>	350 <i>8400</i>	140 <i>16800</i>	21 <i>15120</i>	1 <i>5040</i>	$B_7 = 877$

On remarque, en particulier, que :

- $S_n^{n-1} = C_n^2$ . En effet, une  $(n - 1)$ -partition de  $E$  est constituée d'une partie de deux éléments et de singletons.

Comme il y a  $C_n^2$  façons de choisir ces deux éléments, on a  $S_n^{n-1} = C_n^2$ .

- $S(n, 2) = 2^n - 2$ . En effet, parmi les  $2^n$  applications d'un ensemble de cardinal  $n$  dans un ensemble de cardinal 2, seules 2 applications (à savoir les constantes) ne sont pas surjectives.

Généralisons le raisonnement ci-dessus en classant les applications de  $E$  dans  $F$  en fonction du cardinal de leur image :

Parmi les  $p^n$  applications de  $E$  dans  $F$  :

$S(n, p)$  sont surjectives (c'est-à-dire sont telles que leur image a un cardinal égal à  $p$ )

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$ ,  $S(n, k) C_p^k$  ont une image de cardinal  $k$ .

D'où :

$$S(n, p) = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k S(n, k)$$

Les nombres  $S(n, p)$  situés dans une même ligne (du tableau) sont reliés par une relation de récurrence "forte".

Pour une autre formule sommatoire, voir la fiche sur la formule d'inversion de Pascal.