1. Définition des polynômes de Bernoulli

1.1 Proposition :

Il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

- $B_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = n\,B_{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

De plus, B_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à 1.

Démonstration :

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si B_{n-1} est déjà connu alors posons :

$$B_n(X) = n\int_0^X B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t + C_n \quad \text{où } C_n \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la condition $B_n' = n\,B_{n-1}$ est satisfaite.

Choisissons convenablement la constante C_n pour satisfaire la condition $\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$:

$$n\int_0^1\int_0^X B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}X + C_n = 0$$

D'où :

$$C_n = -n\int_0^1\int_0^X B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}X$$

Cette constante étant parfaitement déterminée, la suite (B_n) ainsi définie est donc unique.

On a par exemple :

$$B_1(X) = \int_0^X B_0(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1\int_0^X B_0(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}X = X - \frac{1}{2}$$

Montrons par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$H(n)$ = " B_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à 1 "

Comme $B_0 = 1$, on a $H(0)$. Comme $B_1 = X - \frac{1}{2}$, on a $H(1)$.

Montrons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad H(n) \Rightarrow H(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $H(n)$. On a donc :

$$B_n = X^n + Q_{n-1} \quad \text{où } Q_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Donc :

$$B_{n+1} = (n+1)\int_0^X B_n(t)\,\mathrm{d}t + C_{n+1} \quad \text{où } C_{n+1} \in \mathbb{R}$$

$$B_{n+1} = (n+1)\left(\frac{X^{n+1}}{n+1} + R_n\right) + C_{n+1} = X^{n+1} + R_n \quad \text{où } R_n = \int_0^X Q_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_n[X]$$

Donc B_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est égal à 1. D'où $H(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit : $H(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2. Remarque : il existe plusieurs variantes dans la façon de définir les polynômes de Bernoulli.

1.3. Calculs des premiers polynômes de Bernoulli :

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

$$B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X$$

$$B_6 = X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$$

$$B_7 = X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X$$

$$B_8 = X^8 - 4X^7 + \frac{14}{3}X^6 - \frac{7}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{30}$$

2. Propriétés des polynômes de Bernoulli

2.1. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\ ;\ 1\},\ B_n(1) = B_n(0)$

2.2 $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$

2.3. $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0$

2.4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(X + 1) - B_n(X) = n\, X^{n-1}$

2.5. $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$

2.6. $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-2p} - 1)B_{2p}(0)$ et $B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Démonstrations :

2.1. En intégrant la relation $B_n' = n\, B_{n-1}$ (pour $n \geqslant 2$) entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 B_n'(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$B_n(1) - B_n(0) = 0$$

2.2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$: $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$

On a :

- $Q_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n'(X) = (-1)^{n+1}\ B_n'(1 - X) = (-1)^{n+1}\, n\, B_{n-1}(1 - X) = n\, Q_{n-1}(X)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t \overset{u=1-t}{=} (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$

La suite (B_n) étant unique, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n = B_n$ d'où la propriété souhaitée.

2.3. D'après la propriété n°1 : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0)$

D'après la propriété n°2 particularisée pour $X = 1$:

$$\forall p \in \mathbb{N},\ B_{2p+1}(1) = -\,B_{2p+1}(0)$$

On en déduit : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0) = 0$

2.4. Montrons par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$H(n) = \text{" } B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1} \text{ "}$$

- $B_1(X+1) - B_1(X) = (X+1) - \dfrac{1}{2} - X + \dfrac{1}{2} = 1$ d'où $H(1)$.
- Montrons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H(n) \Rightarrow H(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $H(n)$: $B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1}$

  En intégrant la relation ci-dessus entre 0 et X on obtient :

$$\int_0^X B_n(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^X B_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^X t^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{X+1} B_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^X B_n(t)\,\mathrm{d}t = X^n$$

$$\int_X^{X+1} B_n(t)\,\mathrm{d}t = X^n$$

$$\left[\frac{B_{n+1}(t)}{n+1}\right]_X^{X+1} = X^n$$

$$B_{n+1}(X+1) - B_n(X) = (n+1)\,X^n$$

  Ce qui est $H(n+1)$.

On déduit la propriété voulue du principe de raisonnement par récurrence.

Au passage, remarquons que dans la démonstration de cette propriété nous avons pour tout entier p :

$$X^p = \int_X^{X+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où, par la relation de Chasles sur les intégrales :

$$\sum_{X=0}^{n} X^p = \int_0^{n+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{B_{p+1}(t)}{p+1}\right]_0^{n+1} = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)}{p+1}$$

Ce qui permet d'expliciter les sommes classiques :

$$\sum_{X=0}^{n} X = \int_0^{n+1} B_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n+1} t - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right]_0^{n+1} = \left[\frac{t(t-1)}{2}\right]_0^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{X=0}^{n} X^2 = \int_0^{n+1} B_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n+1} t^2 - t + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6}\right]_0^{n+1} = \left[\frac{t(2t^2 - 3t + 1)}{6}\right]_0^{n+1} = \left[\frac{(t-1)t(2t-1)}{6}\right]_0^{n+1}$$

$$\sum_{X=0}^{n} X^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{X=0}^{n} X^3 = \int_0^{n+1} B_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n+1} t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4}\right]_0^{n+1} = \left[\frac{t^2(t^2 - 2t + 1)}{4}\right]_0^{n+1} = \left[\frac{t^2(t-1)^2}{4}\right]_0^{n+1}$$

$$\sum_{X=0}^{n} X^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2.5. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$: $Q_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$

On a :

- $Q_0 = \dfrac{1}{2}[1 + 1] = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n'(X) = 2^{n-1}\left[\frac{1}{2}B_n'\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}B_n'\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = 2^{n-2}\left[nB_{n-1}\left(\frac{X}{2}\right) + nB_{n-1}\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = nQ_{n-1}(X)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 2^{n-1}\left[\int_0^1 B_n\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 B_n\left(\frac{t+1}{2}\right)\mathrm{d}t\right] = 2^{n-1}\left[\int_0^{1/2} B_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_{1/2}^1 B_n(u)\,\mathrm{d}u\right] = 0$

La suite (B_n) étant unique, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = B_n$ d'où la propriété souhaitée.

2.6. D'après 2.2. avec $X = \dfrac{1}{2}$: $B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

D'après 2.5. avec $X = 0$: $B_{2p}(0) = 2^{2p-1}\left[B_{2p}(0) + B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ d'où $B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-2p} - 1)B_{2p}(0)$

3. Nombres de Bernoulli

3.1. Il s'agit des nombres b_n définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\boldsymbol{b_n = B_n(0)}$

On a donc : $b_0 = 1$; $b_1 = -\dfrac{1}{2}$; $b_2 = \dfrac{1}{6}$; $b_3 = 0$

On calcule également : $b_4 = -\dfrac{1}{30}$; $b_6 = \dfrac{1}{42}$; $b_8 = -\dfrac{1}{30}$; $b_{10} = \dfrac{5}{66}$

3.2. Propriétés des nombres de Bernoulli :

3.2.1. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p+1} = 0$

3.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k$

3.2.3. $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k b_k$

3.2.4. $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1\}$, $b_{2p} = -\dfrac{1}{(2p+2)(2p+1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} C_{2p+2}^k b_k$

Démonstrations :

3.2.1. Conséquence de 2.3.

3.2.2. D'après l'identité de Taylor pour les polynômes appliquée en 0 :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Or, on a par récurrence immédiate :

$$B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$$

D'où : $$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k$$

3.2.3. D'après 3.2.2. en particularisant $X = 1$ et $n = 2p$:

$$b_{2p} = B_{2p}(1) = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k b_{2p-k} = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^{2p-k} b_k = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k b_k$$

3.2.4. D'après 3.2.3., on a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $$b_{2p+2} = \sum_{k=0}^{2p+2} C_{2p+2}^k b_k$$

Pour $p \geqslant 2$: $b_{2p+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} C_{2p+2}^k b_k + C_{2p+2}^{2p-1} b_{2p-1} + C_{2p+2}^{2p} b_{2p} + (2p+2) b_{2p+1} + b_{2p+2}$

Or, $b_{2p-1} = b_{2p+1} = 0$ d'où : $\forall p \geqslant 2$

$$b_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \sum_{k=0}^{2p-2} C_{2p+2}^k b_k$$

Noter que cette dernière relation permet d'affirmer, par récurrence, que les nombres de Bernoulli sont **rationnels**.

4. Liens entre les nombres de Bernoulli et la fonction zêta de Riemann

Soit $p \in \mathbb{N}$ et f_p 2π-périodique telle que : $f_p(x) = B_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

4.1. Montrer que f_p est continue sur $\mathbb{R}$ pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1\}$.

4.2. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p a la parité de p.

4.3. Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier exponentiel de f_1. ($c_n(f_1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(t)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nt}\,\mathrm{d}t$)

4.4. Montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que : $c_n(f_p) = -\dfrac{p!}{(2\mathbf{i}\pi n)^p}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$. Préciser $c_0(f_p)$.

4.5. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_{2p}(x) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2n\pi)^{2p}}$

4.6. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_{2p+1}(x) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p+1)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(2n\pi)^{2p+1}}$

4.7. Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de b_{2p}. Préciser $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(2p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2p}}$ en fonction de b_{2p} puis de $\zeta(2p)$. Préciser $\alpha(2)$, $\alpha(4)$ et $\alpha(6)$.

Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta(2p+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2p+1}}$ en fonction de $B_{2p+1}\left(\frac{1}{4}\right)$. Préciser $\beta(1)$ et $\beta(3)$.

Solutions :

4.1. Déjà, f_p est continue sur $[0, 2\pi[$ car coïncide avec une fonction polynôme sur cet intervalle.

En outre, lorsque $p \geqslant 2$: $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} f_p(x) = B_p(1) = B_p(0) = f_p(0) = f_p(2\pi)$.

Donc f_p est continue en 2π. Et comme f_p est 2π-périodique, elle est bien continue sur $\mathbb{R}$.

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [0, 2\pi[$ tels que $y = x + 2k\pi$.

$$f_p(x) = f_p(y - 2k\pi) = f_p(y) = B_p\left(\frac{y}{2\pi}\right) = (-1)^n B_p\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) = (-1)^p f_p(2\pi - y) = (-1)^p f_p(-y) = (-1)^p f_p(-x)$$

Ce qui prouve que f_p a la parité de p.

4.3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$: $c_n(f_1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(t)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nt}\,\mathrm{d}t \overset{t=2\pi x}{=} \int_0^1 B_1(x)\,\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}\,\mathrm{d}x$

À l'aide d'une intégration par parties ($u(x) = x - \dfrac{1}{2}$; $v'(x) = \mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}$), on obtient :

$$c_n(f_1) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \frac{\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}}{-2\pi\mathbf{i}n}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

$$c_n(f_1) = -\frac{1}{4\pi\mathbf{i}n} - \frac{1}{4\pi\mathbf{i}n} + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}n}\left[\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}\right]_0^1$$

$$c_n(f_1) = -\frac{1}{2\mathbf{i}\pi n}$$

En outre, $c_0(f_1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_1(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

4.4. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Considérons la propriété :

$$H(p) = \text{" } c_n(f_p) = -\frac{p!}{(2\mathbf{i}\pi n)^p} \text{ " définie pour } p \in \mathbb{N}^*$$

- D'après 4.3, on a $H(1)$.
- Montrons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, que : $H(p) \Rightarrow H(p+1)$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons $H(p)$: $c_n(f_p) = -\dfrac{p!}{(2\mathbf{i}\pi n)^p}$

Calculons : $c_n(f_{p+1}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_{p+1}(t)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} B_{p+1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nt}\,\mathrm{d}t$

En posant $u = \dfrac{t}{2\pi}$: $c_n(f_{p+1}) = \displaystyle\int_0^1 B_{p+1}(u)\,\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nu}\,\mathrm{d}u$

Puis par intégration par parties :

$$c_n(f_{p+1}) = \left[B_{p+1}(u) \times \frac{\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nu}}{-2\pi\mathbf{i}n}\right]_0^{2\pi} + \frac{p+1}{2\pi\mathbf{i}n}\int_0^1 B_p(u)\,\mathbf{e}^{-2\pi\mathbf{i}nu}\,\mathrm{d}u$$

Le crochet est nul et : $c_n(f_{p+1}) = \dfrac{p+1}{2\pi\mathbf{i}n} \times c_n(f_p)$

Et d'après $H(p)$: $c_n(f_{p+1}) = -\dfrac{(p+1)!}{(2\mathbf{i}\pi n)^{p+1}}$

D'où $H(p+1)$.

Le principe de récurrence achève la démonstration.

Par ailleurs : $$c_0(f_p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

4.5. Comme, pour $p \geqslant 2$, f_p est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux, le théorème de convergence normale nous permet d'affirmer que la série de Fourier de f_p converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f_p :

Pour $p \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, $$f_{2p}(x) = c_0(f_{2p}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(f_{2p})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx}\right)$$

Or, $$c_n(f_{2p})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx} = -\frac{(2p)!}{(2\mathbf{i}\pi n)^{2p}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \frac{(2p)!}{(-2\mathbf{i}\pi n)^{2p}}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx}$$

Et comme $\mathbf{i}^{2p} = (-1)^p$, on obtient : $c_n(f_{2p})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx} = -2\,(-1)^p\,(2p)!\,\dfrac{\cos(nx)}{(2n\pi)^{2p}}$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{2p}(x) = -2\,(-1)^p\,(2p)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{(2n\pi)^{2p}} = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{(2n\pi)^{2p}}$$

4.6. Pour $p \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ $$f_{2p+1}(x) = c_0(f_{2p+1}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(f_{2p+1})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p+1})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx}\right)$$

Or, $$c_n(f_{2p+1})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p+1})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx} = -\frac{(2p+1)!}{(2\mathbf{i}\pi n)^{2p+1}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \frac{(2p+1)!}{(-2\mathbf{i}\pi n)^{2p+1}}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx}$$

Et comme $\mathbf{i}^{2p+1} = (-1)^p\mathbf{i}$, on obtient : $c_n(f_{2p+1})\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} + c_{-n}(f_{2p+1})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nx} = -2\,(-1)^p\,(2p+1)!\,\dfrac{\sin(nx)}{(2n\pi)^{2p+1}}$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{2p+1}(x) = -2\,(-1)^p\,(2p+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{(2n\pi)^{2p+1}} = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{(2n\pi)^{2p+1}}$$

Remarquons, que d'après le théorème de Dirichlet, ce résultat reste valable pour $p = 0$ et $x \in]0\,;\,2\pi[$.

4.7. En particularisant 4.5. avec $x = 0$, on obtient :

$$b_{2p} = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{2p}}$$

D'où : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $$\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1}b_{2p}\pi^{2p}\,2^{2p-1}}{(2p)!}$$

On retrouve alors les valeurs :

$$\zeta(2) = b_2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{-b_4\pi^4\,2^3}{4!} = -\frac{b_4\pi^4}{3} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{b_6\pi^6\,2^5}{6!} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \frac{-b_8\pi^8\,2^7}{8!} = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\zeta(10) = \frac{b_{10}\pi^{10}2^9}{10!} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

En particularisant 4.5. avec $x = \pi$, on obtient :

$$f_{2p}(\pi) = B_{2p}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p)!\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n\pi)^{2p}}$$

Et d'après 2.6., $B_{2p}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2^{1-2p} - 1)b_{2p}$ d'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ \alpha(2p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1}b_{2p}\pi^{2p}(1-2^{2p-1})}{(2p)!} = (2^{1-2p} - 1)\,\zeta(2p)$$

On retrouve alors les valeurs :

$$\alpha(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\,\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\alpha(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7}{8}\,\zeta(4) = -\frac{7\pi^4}{720}$$

$$\alpha(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^6} = -\frac{31}{32}\,\zeta(6) = -\frac{31\pi^6}{30240}$$

En particularisant 4.6. avec $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$B_{2p+1}\left(\tfrac{1}{4}\right) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p+1)!\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{(2n\pi)^{2p+1}}$$

Lorsque n est pair, les termes de la somme sont nuls. Posons $n = 2r + 1$ ($r \geqslant 0$). Ainsi :

$$B_{2p+1}\left(\tfrac{1}{4}\right) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p+1)!\,\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2(2r+1)\pi)^{2p+1}}$$

D'où :

$$\beta(2p+1) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r+1)^{2p+1}} = \frac{2^{2p}\pi^{2p+1}(-1)^{p+1}}{(2p+1)!}\,B_{2p+1}\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

On retrouve alors les valeurs :

$$\beta(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = -\pi\,B_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\pi\times -\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta(3) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{4\pi^3}{6}\,B_3\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{2\pi^3}{3}\times\frac{3}{64} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\beta(5) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = -\frac{16\pi^5}{120}\,B_5\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{2\pi^5}{15}\times\frac{25}{1024} = \frac{5\pi^5}{1536}$$

Représentation graphique des polynômes de Bernoulli pour n = 1, 2, 3, 4