

## SÉRIES DE BERTRAND

---

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

Le but est l'étude des séries :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Posons  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ .

### Cas 1 : $\alpha > 1$

Posons  $\gamma = \frac{1 + \alpha}{2}$ .

On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$n^\gamma u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0$  puisque  $\frac{1-\alpha}{2} < 0$ . C'est à dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n^\gamma u_n \leq \varepsilon)$$

En particulier pour  $\varepsilon = 1$  :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma})$$

Comme  $\gamma > 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{n^\gamma}$  converge.

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

Remarque : dans le cas où  $\beta$  est positif, du fait de la décroissance de l'application  $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on peut faire

le raisonnement plus rapide suivant :

On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$n^\alpha u_n = \frac{1}{(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta}$$

En posant  $M = \frac{1}{(\ln 2)^\beta}$  :

$$u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$$

Or, la série de Riemann de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  converge (car  $\alpha > 1$ ).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

Conclusion : la série de Bertrand converge.

### Cas 2 : $\alpha < 1$

On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$$

Or,  $1 - \alpha > 0$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

Par conséquent, il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow n u_n \geq M$$

C'est-à-dire : 
$$n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{M}{n}$$

Or, la série de Riemann de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge (série harmonique).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la divergence de la série de terme général  $u_n$ .

Conclusion : la série de Bertrand diverge.

### Cas 3 : $\alpha = 1$

Étudions le sens de variation de l'application  $f_\beta : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$  sur  $]1, +\infty[$  :

$f_\beta$  est dérivable et 
$$f'_\beta(t) = -\frac{(\ln t)^\beta + \beta(\ln t)^{\beta-1}}{t^2(\ln t)^{2\beta}} = -\frac{\ln t + \beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$$

On a : 
$$f'_\beta(t) \leq 0 \Leftrightarrow \ln t + \beta \geq 0 \Leftrightarrow t \geq e^{-\beta}$$

Par conséquent,  $f_\beta$  est décroissante sur  $]e^{-\beta}, +\infty[$ .

Posons  $n_0 = \max(3, E(e^{-\beta}) + 2)$ .

Ainsi,  $f_\beta$  est décroissante sur  $[n_0 - 1, +\infty[$  et pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \leq \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$$

D'où, par sommation, pour  $n$  allant de  $n_0$  à  $N$  :

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{n_0-1}^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$$

Par changement de variable  $u = \ln t$  (et donc  $t = e^u$ ,  $dt = e^u du$ ) dans les intégrales :

$$\int_{\ln(n_0)}^{\ln(N+1)} \frac{1}{u^\beta} dt \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)} \frac{1}{u^\beta} dt \quad (*)$$

À ce stade distinguons différents cas :

#### $\beta = 1$

Dans ce cas, on obtient :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(n_0)) \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(n_0-1))$$

Or, la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n_0))$  diverge.

Il en va donc de même de la série de Bertrand.

#### $\beta > 1$

Dans ce cas, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \left[ \frac{1}{(1-\beta)u^{\beta-1}} \right]_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)}$$

$$\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{\beta-1} \left( \frac{1}{(\ln(n_0-1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}} \right)$$

Or, comme  $\beta > 1$ ,  $\frac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}}$  tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Les sommes partielles sont donc majorées donc la série de Bertrand converge.

### **$\beta < 1$**

Dans ce cas, on peut procéder comme ci-dessus en utilisant l'autre inégalité de (\*) pour prouver que les sommes partielles divergent. Mais il y a plus simple !

$$\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln n}$$

Et d'après le cas  $\beta = 1$ , la série de Bertrand diverge.

### **RÉSUMÉ**

La série de Bertrand  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

- converge si et seulement si ( $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ))
- diverge si et seulement si ( $\alpha < 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta \leq 1$ ))