

THÉORÈME DE CARTAN-DIEUDONNÉ DANS LE PLAN

Théorème

Toute isométrie du plan affine E peut se décomposer en un produit d'au plus trois réflexions.

Lemme

Une isométrie du plan affine E possédant trois points fixes non alignés est l'identité

Preuve du lemme :

Soit t une isométrie du plan affine E . Soit \vec{t} l'isométrie vectorielle associée, dans le plan vectoriel associé \vec{E} .

Soient A, B et C trois points fixes de t .

Comme A, B, C ne sont pas alignés, (\vec{AB}, \vec{AC}) est une base de \vec{E} .

D'autre part, comme A, B et C sont fixes par t , les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont fixes par \vec{t} .

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$. Notons :
$$\vec{u} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

Par linéarité de \vec{t} , on déduit :

$$\vec{t}(\vec{u}) = \vec{t}(\alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}) = \alpha \vec{t}(\vec{AB}) + \beta \vec{t}(\vec{AC}) = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} = \vec{u}$$

Ce qui prouve que t est une translation ou l'identité.

Or, si t était une translation, elle n'aurait pas de points fixes, donc :

$$t = Id$$

Démonstration du théorème de Cardan-Dieudonné :

Soit t une isométrie de E .

- 1) Si $t = Id$, alors on peut écrire $t = s \circ s$ ou s est une réflexion quelconque et c'est fini.
- 2) Si $t \neq Id$, alors il existe au moins un point A tel que $A' = t(A) \neq A$.

Soit Δ la médiatrice de $[AA']$.

On remarque alors que :
$$s_{\Delta} \circ t(A) = s_{\Delta}(A') = A$$

Donc A est un point fixe de $s_{\Delta} \circ t$.

- a) Si $s_{\Delta} \circ t = Id$, alors $t = s_{\Delta}$ est c'est fini.
- b) Si $s_{\Delta} \circ t \neq Id$, alors il existe au moins un point B tel que $B' = s_{\Delta} \circ t(B) \neq B$.

Soit Δ' la médiatrice de $[BB']$.

Montrons que A est fixe par $s_{\Delta'}$:

Comme $s_{\Delta} \circ t$ est une isométrie, on a :
$$AB' = AB$$

Donc $A \in \Delta'$. C'est-à-dire :
$$s_{\Delta'}(A) = A$$

A est fixe par $s_{\Delta'}$.

En conséquence, on a :

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(A) = A$$

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(B) = B$$

- i) Si $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t = Id$, alors $t = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ et c'est fini.

ii) Si $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t \neq Id$, il existe au moins un point C tel que $C' = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(C) \neq C$.

Comme A et B sont fixes par l'isométrie $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t$, on a : $AC = AC'$ et $BC = BC'$

Donc A et B sont sur la médiatrice Δ'' de $[CC']$.

On en déduit que A , B et C sont non alignés et sont des points fixes de $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t$.

D'après le lemme : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t = Id$

D'où : $t = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta''}$

Ce qui prouve le théorème.