CONVERGENCE SIMPLE, UNIFORME, UNIFORME SUR TOUT COMPACT D'UNE SUITE D'APPLICATIONS

Contexte :

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-ev.

Soit $(E, \|\ .\ \|)$ un evn de dimension finie.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E.

Définitions :

1. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une application f si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N(x, \varepsilon) \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Ce qui revient à dire :

Pour chaque $x \in X$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (pour la norme $\|\ .\ \|$ de E)

On note alors : $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur X

2. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

On note alors : $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X

3. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de X vers une application f si :

Pour tout compact C de X, $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur C.

On note alors : $f_n \xrightarrow{CC} f$ sur X

Comparaison de ces différents modes de convergence :

1. Supposons $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X.

Soient $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse, on a :

$$\exists N(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Ce qui prouve : $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur X

Donc : **la convergence uniforme entraîne la convergence simple**

2. Supposons $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X.

Soit C un compact de X. Alors : $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur C.

Ce qui prouve : $f_n \xrightarrow{CC} f$ sur X

Donc : **la convergence uniforme entraîne la convergence uniforme sur tout compact**

On verra plus loin des les réciproques de ces deux implications sont fausses.

Auparavant, nous devons approfondir la notion de convergence uniforme.

Notion de "norme infinie" d'une fonction bornée :

Soit f une fonction bornée sur X. Alors f admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Définissons alors :

$$\forall\ f \in B(X, E) \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

On vérifiera (à titre d'exercice) que l'application $\| \, . \, \|_\infty : B(X, E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une norme.

Proposition :

> Une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f ssi :
>
> $\begin{cases} \text{i) } \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow f_n - f \text{ bornée sur } X) \\ \text{ii) La suite numérique } (\|f_n - f\|_\infty) \text{ converge vers } 0. \end{cases}$

Démonstration :

Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f.

En particularisant la définition de la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1$, on obtient :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N_1 \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant 1)$$

Ce qui prouve : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow f_n - f$ bornée sur $X)$

Les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X pour tout $n \geqslant N_1$, donc dans ce cas, $\|f_n - f\|_\infty$ existe bien.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a d'une part : (d'après la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur X)

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N(\varepsilon), N_1)$. Pour tout $n \geqslant N$, on a alors :

$$f_n - f \text{ bornée sur } X \ \textbf{ et } \ \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Par passage à la borne supérieure sur $x \in X$, on en déduit :

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve bien : La suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geqslant N}$ converge vers 0.

Réciproquement supposons vérifiées les assertions i) et ii).

On a pour $n \geqslant N_1$:

$$\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge vers 0 :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon)$$

Pour $n \geqslant \max(N_1, N)$, la transitivité des inégalités donne :

$$\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve bien : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f

Corollaire :

Soit une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **bornées** convergeant **uniformément** vers f sur X.

Alors f est **bornée**.

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $$f = (f - f_n) + f_n$$

D'après la proposition précédente :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \ \Rightarrow \ f_n - f \text{ bornée sur } X)$$

Comme f_n est également bornée, on en déduit que f est bornée.

Donnons maintenant un des critères les plus utilisés pour montrer qu'une convergence est uniforme :

Proposition :

Soit une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **bornées** et f une application **bornée**.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \ \Leftrightarrow \ \text{la suite numérique } (\|f_n - f\|_\infty) \text{ converge vers } 0.$$

Démonstration :

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

Important : par contraposition, on obtient :

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \ \Leftrightarrow \ \text{la suite numérique } (\|f_n - f\|_\infty) \text{ ne converge pas vers } 0.$$

Et a fortiori, s'il existe une suite (x_n) d'éléments de X **convergente dans** X pour laquelle la suite $(\|f_n(x_n) - f(x_n)\|)$ ne converge pas vers 0 alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

Exemples :

1) $f_n(x) = \mathbf{e}^{-nx} \sin x$ sur $X = \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

On a : $$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x)| \leqslant x\,\mathbf{e}^{-nx}$$

Posons $g_n(x) = x\,\mathbf{e}^{-nx}$. On a : $$g'_n(x) = (1 - nx)\,\mathbf{e}^{-nx}$$

On a : $$g'_n(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - nx \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \leqslant \frac{1}{n}$$

D'où $$g_n \text{ croissante sur } [0 \,;\, \tfrac{1}{n}] \text{ et décroissante sur } [\tfrac{1}{n} \,;\, +\infty[$$

Donc g_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et admet son maximum en $\frac{1}{n}$ et :

$$\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n\mathbf{e}}$$

La suite $(\|g_n\|_\infty)$ tendant vers 0, on en déduit alors :

$$g_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

D'où, par comparaison : $$f_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Étudions déjà la convergence simple.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors : $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Donc : $$f_n \xrightarrow{CS} 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Montrons maintenant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de remarquer : $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Comme la suite ci-dessus non converge pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Comparaison des différents modes de convergence (suite) :

Définissons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $$\begin{aligned} f_n : [0, 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Étude de la convergence simple :

Pour tout $x \in [0, 1[$ fixé, on a : $$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f = 0$.

Étude de la convergence sur tout compact :

Soit C un compact de $[0, 1[$. Donc il existe un réel a de $[0, 1[$ tel que : $C \subset [0, a]$.

Or : $$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n$$

Et comme $a \in [0, 1[$: $$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0, a]$ donc sur le compact C.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $[0, 1[$.

Étude de la convergence uniforme :

On a : $$m_n = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$$

La suite (m_n) ne tendant pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Retenir :

la convergence uniforme sur tout compact n'entraîne pas la convergence uniforme en général

Définissons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Étude de la convergence simple :

Pour tout $x \in [0, 1[$ fixé, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$

Et si $x = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Étude de la convergence uniforme :

On a : $$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Donc : $$m_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$$

La suite (m_n) ne tendant pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Retenir :

la convergence simple n'entraîne pas le convergence uniforme en général

Remarque : On peut prouver autrement, à l'aide de la continuité (voir ci-dessous), qu'une suite d'applications ne converge pas uniformément.

Théorème

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **continues** définies sur un **intervalle** ***I*** de $\mathbb{R}$.

1) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformément** sur I vers une application f, alors f est **continue**.
2) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformément sur tout compact** de I vers f, alors f est **continue**.

Démonstration :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications **continues** définies sur un **intervalle** ***I*** de $\mathbb{R}$.

1) On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur I vers une certaine application f.

   Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a :

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   On sait que f_n converge uniformément sur I vers f :
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$
   On sait que f_N est continue en a :
   $$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (|x - a| < \eta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon)$$
   Pour un tel η, on a alors :
   $$|x - a| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon$$
   On en déduit : f continue en a

   D'où : f continue sur I

2) On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout compact** de I vers f.

   Soit $a \in I$.

Soit C un compact contenant a.

D'après 1), f est continue sur C donc en a.

Donc f est continue sur I.

Corollaire :

Si une suite d'applications **continues** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une application f **non continue**, alors la convergence n'est pas uniforme.

Démonstration :

Si la convergence était uniforme, f serait nécéssairement continue. (Théorème précédent)

Comme ce n'est pas le cas, la convergence ne peut pas être uniforme.

Applications :

On retrouve ainsi le fait que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ne peut converger uniformément sur [0, 1]. (Puisque sa limite simple f n'est pas continue)