RACINES D'UNE FONCTION POLYNÔME DU 3ème DEGRÉ (à coefficients réels)

On considère une fonction polynôme P, de dégré 3, à coefficients réels.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a, b, c \text{ et } d \text{ réels et } a \neq 0$$

Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de P sont infinies et de signes opposés (selon le signe de a). Comme la fonction P est continue (car polynomiale) le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'au moins une racine réelle.

On propose ci-dessous une méthode pour calculer sa valeur exacte.

Posons $x = X + h$ (ou $X = x - h$) ainsi :

$$P(x) = P(X + h) = a(X + h)^3 + b(X + h)^2 + c(X + h) + d$$

$$P(X + h) = aX^3 + (3ah + b)X^2 + (3ah^2 + 2bh + c)X + ah^3 + bh^2 + ch + d$$

Choisissons h comme suit, de façon à annuler le terme en X^2 :

$$\boxed{h = -\frac{b}{3a}}$$

Posons également pour simplifier la taille de l'expression :

$$\boxed{p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \text{ et } q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a}}$$

On a ainsi :

$$P(X + h) = a(X^3 + pX - q)$$

On a donc : $P(x) = 0 \iff P(X + h) = 0 \iff X^3 + pX = q$

Posons $X = u + v$ avec u et $v \in \mathbb{C}$. (On a, à ce stade, une infinité de choix pour u et v).

Ainsi, l'équation $X^3 + pX = q$ équivaut à :

$$(u + v)^3 + p(u + v) = q$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) = q$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) = q$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = q$$

On peut éliminer un terme en choisissant u et v tels que :

$$uv = -\frac{p}{3}$$

(Toujours possible car un système "somme-produit" admet toujours des couples solutions dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$)

Ainsi, on a le système "somme-produit" suivant :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3v^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Les complexes u^3 et v^3 sont donc solutions de l'équation du second degré suivante :

$$Z^2 - qZ + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Calculons le discriminant Δ de ce trinôme du second degré :

$$\boxed{\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Donc : $$u^3 = \frac{q - \mathbf{i}^{\frac{1-signe(\Delta)}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \frac{q + \mathbf{i}^{\frac{1-signe(\Delta)}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Remarquons que u^3 et v^3 sont soit deux réels (lorsque $\Delta \geqslant 0$), soit des complexes conjugués (lorsque $\Delta < 0$). Dans ce dernier cas, on peut donc trouver des nombres complexes u et v qui seront également des complexes conjugués. De cette manière, on a toujours $u + v$ qui est **réel**.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} X = u + v \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont les racines cubiques de} \\ \dfrac{q - \mathbf{i}^{\frac{1-signe(\Delta)}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \text{et} \quad \dfrac{q + \mathbf{i}^{\frac{1-signe(\Delta)}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{array}}$$

Et $X \in \mathbb{R}$ nécessairement, puisqu'on a choisi u et v conjuguées (lorsque $\Delta < 0$).

<u>Remarque</u> : dans le cas où u^3 et v^3 sont des réels, on a l'expression suivante :

$$X = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

(Formules de Cardano-Tartaglia)

D'où une première solution réelle :

$$\boxed{x_1 = u + v - \frac{b}{3a}}$$

Pour trouver les 2 autres racines, on factorise le polynôme P par $(x - x_1)$. La suite est élémentaire.

<u>Exemple</u> : $X^3 + X = -1$.

On a : $$p = 1 \; ; \; q = -1 \; ; \; \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 1 + \frac{4}{27} = \frac{31}{27}$$

$$X = \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} \simeq -0{,}68$$