ÉQUATIONS DE DIOPHANTE

Il s'agit des équations de la forme : $ax + by = c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation admette au moins une solution.

b) Déterminer, dans ce cas, l'ensemble de toutes les solutions.

c) Application : en multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31, j'obtiens 442.
Quelle est ma date de naissance ? (On ne demande pas l'année, ouf !)

<u>Solution</u> :

a) Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$.

Soient a' et b' tels que : $a = da'$ et $b = db'$

D'après l'homogénéité du pgcd, on a alors : $a' \wedge b' = 1$

L'équation s'écrit : $d(a'x + b'y) = c$

Distinguons deux cas :

- Si d ne divise pas c, alors l'équation n'a pas de solutions.
- Si d divise c, alors on pose $c = dc'$. Notre équation s'écrit alors :

$$a'x + b'y = c'$$

Par ailleurs, comme $a' \wedge b' = 1$, le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple (u, v) tel que :

$$a'u + b'v = 1$$

En multipliant par c', on a alors : $a'c'u + b'c'v = c'$

Le couple $(c'u, c'v)$ est donc une solution particulière de l'équation Diophantienne $ax + by = c$.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de solution est : <u>le pgcd de *a* et *b* divise *c*</u>.

b) On suppose désormais que le pgcd de a et b divise c.

Nous connaissons maintenant une solution particulière $(c'u, c'v)$.

On peut en déduire l'ensemble des solutions. Soit (x, y) une solution quelconque de l'équation $ax + by = c$.

On a alors : $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a'c'u + b'c'v = c' \end{cases}$

Par différence, il vient : $a'(x - c'u) + b'(y - c'v) = 0$

En conséquence : $a' \mid b'(y - c'v)$

Et comme $a' \wedge b' = 1$, on a, d'après le théorème de Gauss :

$$a' \mid (y - c'v)$$

Donc : $\exists k \in \mathbb{Z}, y = ka' + c'v$

En remplaçant : $a'(x - c'u) + b'ka' = 0$

Et comme $a' \neq 0$: $x = -b'k + c'u$

Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(-b'k + c'u, ka' + c'v)$ est bien solution de l'équation Diophantienne.

<u>Bilan</u> : les couples (x, y) solutions de l'équation $ax + by = c$ (lorsque $\text{pgcd}(a, b)$ divise c) sont de la forme :

$$(x, y) = (-b'k + c'u, ka' + c'v), \quad k \in \mathbb{Z}$$

c) Notons J et M mon jour et mon mois de naissance respectivement.

On a donc : $12J + 31M = 442$

Comme $12 \wedge 31 = 1$, l'équation admet des solutions. (Donc je suis bien né !)

On recherche une solution particulière en appliquant l'algorithme d'Euclide-Bézout :

$$\overset{r_0}{31} = \overset{q_1}{2} \times \overset{r_1}{12} + \overset{r_2}{7}$$

$$\overset{r_1}{12} = \overset{q_2}{1} \times \overset{r_2}{7} + \overset{r_3}{5}$$

$$\overset{r_2}{7} = \overset{q_3}{1} \times \overset{r_3}{5} + \overset{r_4}{2}$$

$$\overset{r_3}{5} = \overset{q_4}{2} \times \overset{r_4}{2} + \overset{r_5}{1}$$

$$\overset{r_4}{2} = \overset{q_5}{2} \times \overset{r_5}{1} + \overset{r_6}{0}$$

Puis, on exprime le pgcd (à savoir 1) en fonction des restes précédents :

$$1 = 5 - 2 \times 2$$

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5$$

$$1 = -2 \times 7 + 3 \times (12 - 7) = 3 \times 12 - 5 \times 7$$

$$1 = 3 \times 12 - 5 \times (31 - 2 \times 12) = -5 \times 31 + 13 \times 12$$

Finalement, un couple (u, v) possible est $(-5, 13)$.

On a donc : $$-5 \times 31 + 13 \times 12 = 1$$

En multipliant par 442 : $$-2210 \times 31 + 5746 \times 12 = 442$$

Donc le couple $(J_0, M_0) = (5742, -2210)$ est une solution particulière de l'équation $12J + 31M = 442$.

On recherche maintenant l'ensemble de toutes les solutions. Soit (J, M) une solution quelconque.

$$\begin{cases} 12J + 31M = 442 \\ 5746 \times 12 - 2210 \times 31 = 442 \end{cases}$$

Par différence, il vient : $$12(J - 5746) + 31(M + 2210) = 0$$

En conséquence : $$31 \mid 12(J - 5746)$$

Et comme $12 \wedge 31 = 1$, on a, d'après le théorème de Gauss :

$$31 \mid J - 5746$$

Donc : $$\exists k \in \mathbb{Z},\ J = 31k + 5746$$

Or, évidemment $J \in [\![1, 31]\!]$: $$1 \leqslant 31k + 5746 \leqslant 31$$

$$-5745 \leqslant 31k \leqslant -5715$$

$$k = -185$$

$$J = 11$$

On en déduit : $$M = 10$$

Je suis donc né un 11 octobre.