

- Partie A - Étude d'une suite -

Soit X un réel strictement positif fixé. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(X))$ par :

$$u_n(X) = \frac{X^n}{n!}$$

Le but de cette première partie est de démontrer que la suite $(u_n(X))$ converge vers 0.

1. Soit N un entier supérieur à X strictement. On note $q = \frac{X}{N}$. Démontrer que :

$$u_n(X) = q^n \frac{N^n}{n!}$$

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geq N$:

$$\frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^N}{N!}$$

3. En déduire que la suite $(u_n(X))$ converge vers 0.

- Partie B - Étude d'une intégrale -

Pour tout réel x strictement positif et tout entier naturel n , on considère l'intégrale :

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{tx} dt$$

0. Démontrer que :

$$0 < I_n(x) \leq \frac{2e^x}{n!}$$

1. Calculer $I_0(x)$ et démontrer que : $I_1(x) = \frac{1}{x^3} \left((2x-2)e^x + (2x+2)e^{-x} \right)$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2}(x) = \frac{4}{x^2} I_n(x) - \frac{4n+6}{x^2} I_{n+1}(x)$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n , il existe une fonction polynôme P_n à coefficients entiers et de degré n telle que :

$$I_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} \left(P_n(x)e^x - P_n(-x)e^{-x} \right)$$

- Partie C - Epilogue -

1. Le but de cette question est de démontrer que si x est un nombre rationnel non nul, alors e^x est un irrationnel.

Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$ noté $x = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On va raisonner par l'absurde en supposant $e^x \in \mathbb{Q}_+^*$. On note donc $e^x = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Démontrer, à l'aide des résultats des parties précédentes que :

$$abp^{2n+1}I(x) \in \mathbb{Z}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} abp^{2n+1}I(x) = 0$$

En déduire une contradiction et conclure dans le cas où $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

2. Démontrer que si $x \in \mathbb{Q}_-^*$, alors $e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Démontrer que si $x \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, alors $\ln x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Partie A - Étude d'une suite -

1. Il suffit d'écrire :

$$u_n(X) = \frac{X^n}{N^n} \times \frac{N^n}{n!} = q^n \frac{N^n}{n!}$$

2. On considère la propriété \wp définie pour $n \geq N$ par :

$$\wp(n) : \frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^N}{N!}$$

- On a clairement $\wp(N)$.
- Supposons $\wp(n)$ pour un certain entier $n \geq N$.

$$\frac{N^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{N^n}{n!} \times \frac{N}{(n+1)} \stackrel{\wp(n)}{\leq} \frac{N^N}{N!} \times \frac{N}{(n+1)} \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{N^N}{N!}$$

D'où $\wp(n+1)$

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit la propriété $\wp(n)$ pour tout $n \geq N$.

3. On a donc, pour tout $n \geq N$:
$$0 \leq u_n(X) \leq q^n \frac{N^N}{N!}$$

La quantité $\frac{N^N}{N!}$ est indépendante de n . Par ailleurs, comme $N > X > 0$, on a $q \in]0, 1[$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Du théorème des gendarmes, on en déduit :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(X) = 0$$

Remarque : si l'on sait que, pour tout X fixé, la série de terme général $\frac{X^n}{n!}$ converge (vers e^X), le résultat ci-dessus est alors immédiat puisque le terme général d'une série convergente tend nécessairement vers 0.

- Partie B - Étude d'une intégrale -

0. Pour tout $t \in [-1 ; 1]$, on a :
$$0 \leq (1-t^2)^n \leq 1$$

D'où :
$$0 \leq (1-t^2)^n e^{tx} \leq e^{tx} \leq e^x$$

En intégrant pour t allant de -1 à 1 , on obtient :

$$0 \leq \int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{tx} dt \leq 2e^x$$

D'où :
$$0 \leq I_n(x) \leq \frac{2e^x}{n!}$$

Enfin, l'application $f : t \mapsto (1-t^2)^n e^{tx}$ est positive sur $[-1 ; 1]$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, donc si F est une de ses primitives, alors F est strictement croissante sur $[-1 ; 1]$. En particulier :

$$F(1) - F(-1) > 0$$

C'est-à-dire :
$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{tx} dt > 0$$

D'où :
$$I_n(x) > 0$$

Conclusion :
$$0 < I_n(x) \leq \frac{2e^x}{n!}$$

1. On a :
$$I_0(x) = \int_{-1}^1 e^{tx} dt = \left[\frac{e^{tx}}{x} \right]_{-1}^1 = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Calculons $I_1(x)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives :

$$I_1(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{tx} dt$$

On pose :
$$u(t) = 1 - t^2 \text{ et } v'(t) = e^{tx}$$

Ainsi :
$$u'(t) = -2t \text{ et } v(t) = \frac{e^{tx}}{x}$$

D'où :
$$I_1(x) = \frac{2}{x} \int_{-1}^1 t e^{tx} dt$$

On calcule $\int_{-1}^1 t e^{tx} dt$ à l'aide d'une seconde intégration par parties :

$$\int_{-1}^1 t e^{tx} dt = \left[\frac{t e^{tx}}{x} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{x} \int_{-1}^1 e^{tx} dt = \frac{e^x + e^{-x}}{x} - \frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left((x-1)e^x + (x+1)e^{-x} \right)$$

Finalement :
$$I_1(x) = \frac{1}{x^3} \left((2x-2)e^x + (2x+2)e^{-x} \right)$$

2. On a :
$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{(n+2)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n+2} e^{tx} dt$$

Posons :
$$u(t) = (1-t^2)^{n+2} \text{ et } v'(t) = e^{tx}$$

Ainsi :
$$u'(t) = -2t (1-t^2)^{n+1} \text{ et } v(t) = \frac{e^{tx}}{x}$$

On obtient :
$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{x(n+1)!} \int_{-1}^1 2t (1-t^2)^{n+1} e^{tx} dt$$

On remet ça avec :
$$u(t) = 2t (1-t^2)^{n+1} \text{ et } v'(t) = e^{tx}$$

Ainsi :

$$u'(t) = 2(1-t^2)^{n+1} - 4(n+1)t^2(1-t^2)^n = 2(1-t^2)^{n+1} + 4(n+1)(1-t^2)^{n+1} - 4(n+1)(1-t^2)^n$$

$$u'(t) = (4n+6)(1-t^2)^{n+1} - 4(n+1)(1-t^2)^n \text{ et } v(t) = \frac{e^{tx}}{x}$$

D'où :
$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{x^2(n+1)!} \int_{-1}^1 \left[4(n+1)(1-t^2)^n - (4n+6)(1-t^2)^{n+1} \right] e^{tx} dt$$

$$I_{n+2}(x) = \frac{4}{x^2} I_n(x) - \frac{4n+6}{x^2} I_{n+1}(x)$$

3. On considère la propriété \wp , définie pour tout entier naturel n par :

$\wp(n)$: pour tout $k \in \llbracket 0 ; n+1 \rrbracket$, il existe une fonction polynôme P_k de degré k , à coefficients entiers et telle que

$$I_k(x) = \frac{1}{x^{2k+1}} \left(P_k(x)e^x - P_k(-x)e^{-x} \right)$$

- D'après la question 1, on a $\wp(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$. D'après la question 2, on a :

$$I_{n+2}(x) = \frac{4}{x^2} I_n(x) - \frac{4n+6}{x^2} I_{n+1}(x)$$

D'après $\wp(n)$ appliquée avec $k = n$ et $k = n+1$:

$$I_{n+2}(x) = \frac{4}{x^{2n+3}} \left(P_n(x)e^x - P_n(-x)e^{-x} \right) - \frac{4n+6}{x^{2n+5}} \left(P_{n+1}(x)e^x - P_{n+1}(-x)e^{-x} \right)$$

$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{x^{2n+5}} \left(4x^2 P_n(x)e^x - 4x^2 P_n(-x)e^{-x} - (4n+6)P_{n+1}(x)e^x + (4n+6)P_{n+1}(-x)e^{-x} \right)$$

Posons :

$$P_{n+2}(x) = 4x^2 P_n(x) - (4n+6)P_{n+1}(x)$$

P_{n+2} est bien une fonction polynôme à coefficients entiers et de degré $n+2$.

Et ainsi, on a :

$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{x^{2n+5}} \left(P_{n+2}(x)e^x - P_{n+2}(-x)e^{-x} \right)$$

On a donc, pour tout $k \in \llbracket 0 ; n+2 \rrbracket$, l'existence d'une fonction polynôme P_k à coefficients entiers et de

degré k telle que :

$$I_k(x) = \frac{1}{x^{2k+1}} \left(P_k(x)e^x - P_k(-x)e^{-x} \right)$$

D'où $\wp(n+1)$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, la propriété \wp est donc vraie pour tout entier n .

En particulier, on a bien pour tout entier naturel n , l'existence d'une fonction polynôme P_n à coefficients

entiers et de degré n telle que : $I_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} \left(P_n(x)e^x - P_n(-x)e^{-x} \right)$

- Partie C - Epilogue -

1. Comme $x = \frac{p}{q}$ et que P_n est à coefficients entiers et de degré n , $q^n P_n(x)$ et $q^n P_n(-x)$ sont des entiers. Or :

$$I_n(x) = \frac{q^{2n+1}}{p^{2n+1}} \left(P_n(x) \frac{a}{b} - P_n(-x) \frac{b}{a} \right)$$

D'où :

$$abp^{2n+1} I_n(x) = a^2 q^{2n+1} P_n(x) - b^2 q^{2n+1} P_n(-x) \in \mathbb{Z}$$

Or, $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$ et $I_n(x) > 0$ donc : $abp^{2n+1} I_n(x) \in \mathbb{Z}^*$

Par ailleurs, d'après B.0 :

$$abp^{2n+1} I_n(x) \leq \frac{2abp^{2n+1} e^x}{n!}$$

Et comme $e^x = \frac{a}{b}$:

$$abp^{2n+1} I_n(x) \leq \frac{2a^2 p^{2n+1}}{n!}$$

$$abp^{2n+1}I_n(x) \leq 2a^2p \frac{(\sqrt{p})^n}{n!}$$

Et d'après la partie A appliquée avec $X = \sqrt{p}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} abp^{2n+1}I_n(x) = 0$$

La suite $(abp^{2n+1}I_n(x))$ est une suite d'entiers non nuls qui converge vers 0, absurde.

Donc :

$$e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Si $x \in \mathbb{Q}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{Q}_+^*$ et d'après la question précédente :

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

3. On a donc :

$$x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Soit $x \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$. Si $\ln x \in \mathbb{Q}^*$, alors d'après ce qui précède $e^{\ln x} = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, absurde.

Donc $\ln x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bilan :

$$x \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\} \Rightarrow \ln x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$