EXPONENTIELLE DE MATRICE

On rappelle que $M_n(\mathbb{K})$ est dimension finie n^2. Donc, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

Cependant, nous allons nous interésser, ici, à des normes qui ont une propriété supplémentaire.

Définition

On appelle norme d'algèbre (ou norme mutiplicative) toute norme de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|\ \|B\|$$

L'intérêt d'une telle norme est qu'elle permettra de définir l'exponentielle d'une matrice (Voir un peu plus bas) grâce à la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|A^k\| \leqslant \|A\|^k$$

Cette inégalité se prouve sans difficulté par récurrence (exercice).

Proposition

Il existe au moins une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

Par exemple :

$$N : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto n\, N_\infty(A)$$

N_∞ désignant la norme "sup des modules des coefficients" de la matrice A.

En effet, on vérifie que N est une norme (exercice) et de plus :

$$N(AB) = n\, N_\infty(AB) = n \max_{i,k} \left| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right| \leqslant n \max_{i,k} \sum_j |a_{ij}| |b_{jk}|$$

$$N(AB) \leqslant n \max_{i,k} \max_{i,j} |a_{ij}| \sum_j |b_{jk}| \leqslant n \max_k N_\infty(A)\, n \max_{j,k} |b_{jk}| \leqslant n\, N_\infty(A)\, n\, N_\infty(B) \leqslant N(A)\, N(B)$$

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors : la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{A^n}{n!}$ est (absolument) convergente.

Preuve :

Soit $\|\ .\ \|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ \|A^k\| \leqslant \|A\|^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Or, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge vers $\mathbf{e}^{\|A\|}$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \mathbf{e}^{\|A\|}$$

Les sommes partielles sont majorées donc la série des valeurs absolues converge.

Donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{A^n}{n!}$ est convergente.

Définition

On appelle exponentielle de la matrice A, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.