FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

<u>Théorème 1</u>

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f est **bornée sur I**.

<u>Démonstration</u> :

Supposons f non **bornée** sur I.

Soit c le milieu de I.

Posons $a_1 = a$ et $b_1 = c$ si f non bornée sur $[a, c]$.

Posons $a_1 = c$ et $b_1 = b$ sinon.

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Sur chacun de ces intervalles, f est, par construction, non bornée.

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons x_0 leur limite commune.

Comme f est continue en x_0, on a (avec $\varepsilon = 1$) :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1)$$

C'est-à-dire : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1)$

Donc f est bornée sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Comme les segments $[a_n, b_n]$ ont des longueurs qui tendent vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : (n \geqslant N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon)$$

Donc, pour un certain N, les segments $[a_n ; b_n]$, $n \geqslant N$, sont contenus dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Or, f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$ d'où une contradiction.

Donc f est bornée sur I.

<u>Théorème 2</u>

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f **atteint ses bornes**.

<u>Démonstration</u> :

D'après le théorème 1, on sait que f est bornée. Notons $M = \sup\limits_I f$ et $m = \inf\limits_I f$.

Montrons qu'il existe x_0 dans I tel que $f(x_0) = M$.

Comme M est la borne supérieure de f sur I :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I : M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$: $\quad \exists x_n \in I : M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$

La suite $(f(x_n))$ converge donc vers M.

En outre, la suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un certain réel x_0. Notons $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers x_0.

La fonction f étant continue en x_0, on a : $\quad M = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x_0)$.

Donc f atteint son maximum.

On démontre, de même, que f atteint son minimum.

<u>Corollaire</u>

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors $f(I)$ est un segment.

<u>Démonstration</u> :

On sait déjà, que l'image (par f continue) d'un intervalle est un intervalle.

D'après le théorème 1, $J = f(I)$ est un intervalle borné.

D'après le théorème 2, J est fermé.

Donc J est un segment.