DIFFÉRENTES FORMULES DE TAYLOR POUR UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

Introduction

Soient f une fonction de classe C^p sur un intervalle I, $a \in I$ et T_p un polynôme de degré p tel que :

$$T_p(a) = f(a)\ ;\ T_p'(a) = f'(a)\ ;\ \dots\ ; T_p^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)$$

Nous savons que toute famille de $p + 1$ éléments échelonnée en degré est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

On peut donc écrire :

$$T_p(x) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j (x-a)^j$$

On a : $$T_p^{(k)}(x) = k!\,\lambda_k + \sum_{j=k+1}^{p} C_j^k k!\lambda_j (x-a)^{j-k}$$

D'où : $$T_p^{(k)}(a) = k!\,\lambda_k \text{ et } \lambda_k = \frac{T_p^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

On a donc : $$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

T_p s'appelle le polynôme de Taylor à l'ordre p de la fonction f en a.

1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1

Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Alors : $$\forall x \in I,\ f(x) = T_p(x) + R_p(x)$$

où $$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \text{ et } R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(T_p s'appelle encore la partie régulière d'ordre p du développement de Taylor et R_p est le reste intégral d'ordre p)

Démonstration par récurrence finie sur $n \leqslant p$:

On considère la propriété H_n définie pour $n \in [\![0,\ p]\!]$ par :

$$H_n : \forall x \in I,\ f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Le point de départ : on sait que : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \ \mathrm{d}t\ \ \forall x \in I$, ce qui est H_0.

Supposons que H_{n-1} soit vraie pour un certain entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant p$.

À l'aide d'une intégration par parties de $R_n(x)$, il vient :

(en posant $u_n'(t) = f^{(n+1)}(t)$, $v_n(t) = (x-t)^n$, $u_n(t) = f^{(n)}(t)$ et $v_n'(t) = -n(x-t)^{n-1}$) :

$$R_n(x) = \left[\frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!}\right]_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = -T_n(x) + T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \overset{\text{HR}}{=} -T_n(x) + f(x) \text{ d'où } H_n.$$

Autres formulations :

En posant $h = x - a$, la formule de Taylor peut encore s'écrire :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Et, en posant $u = t - a$ dans le reste intégral, on obtient ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_0^{h} \frac{(h-u)^p}{p!} f^{(p+1)}(a+u)\,\mathrm{d}u$$

2. Formule de Taylor-Lagrange. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2

Soit f une fonction de classe C^p et $(p + 1)$ fois dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ et à **valeurs réelles**.

Alors $\exists c \in \,]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

Démonstration 1 :

Posons $\varphi(t) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} A$ et choisissons A tel que $\varphi(a) = 0$.

(On a donc $\displaystyle\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} A = f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$)

En outre, on a $\varphi(b) = 0$.

Puisque f est de classe C^p sur I, la fonction φ est dérivable sur I et l'on a :

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) \right] + \frac{(b-t)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A = \frac{(b-t)^p}{p!} \left(A - f^{(p+1)}(t) \right)$$

D'après le théorème de Rolle (φ est dérivable sur $[a, b]$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$), $\exists c \in \,]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc tel que :

$$A = f^{(p+1)}(c) \text{ d'où la formule de Taylor-Lagrange.}$$

Dans le cas où, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur I, on a la démonstration 2 suivante plus simple :

On a : $$R_p(b) = \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or : $$\frac{(b-t)^p}{p!} \geqslant 0 \text{ sur } [a, b].$$

D'après la formule de la moyenne (voir exposé sur la définition de l'intégrale), on a :

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } R_p(b) = f^{(p+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!}\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

La formule de Taylor-Lagrange n'est pas valable si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

<u>**Inégalité de Taylor-Lagrange**</u> :

En majorant le reste intégral (ou le reste dans la formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions réelles $\mathbb{R}$) :

La fonction $f^{(p+1)}$ étant continue sur le compact $[a, x]$ (ou $[x, a]$), il existe un majorant M de $|f^{(p+1)}|$ sur ce compact. On a alors :

$$|R_p(x)| \leqslant \frac{M}{p!} \int_a^x \left|(x-t)^p\right| dt$$

$$|R_p(x)| \leqslant M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Attention, dans l'inégalité ci-dessus, le majorant M dépend de p.

D'où l'inégalité de Taylor-Lagrange :

<u>Théorème 3</u>

Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur une intervalle I et soit $a \in I$.

Soit M un majorant de $|f^{(p+1)}|$ sur l'intervalle $[a, x]$ (ou $[x, a]$).

Alors pour tout $x \in I$: $$|f(x) - T_p(x)| \leqslant M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Autre écriture :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \|f^{(p+1)}\|_\infty \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

3. Aspect local : formule de Taylor-Young

<u>Théorème 4</u>

Soit f une fonction de classe C^p sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Alors pour x situé au voisinage de a : $f(x) = T_p(x) + o\left((x-a)^p\right)$

<u>Démonstration</u> :

Soit $x \in I$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $p - 1$ sur l'intervalle $[a, x]$.

$$\exists c \in I \text{ tel que } f(x) = T_{p-1}(x) + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(c)$$

Lorsque x tend vers a, c tend nécessairement vers a, si bien que l'on a :

$$f^{(p)}(c) = f^{(p)}(a) + \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

D'où : $$f(x) = T_{p-1}(x) + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(x-a)^p}{p!} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = T_p(x) + o\left((x-a)^p\right) \text{ au voisinage de } a.$$