SUITES HOMOGRAPHIQUES

Contexte et données :

> Si $c = 0$, alors l'application f est affine.
> Si $\delta = 0$, alors l'application f est constante.
> Ces deux cas particuliers s'étudient différemment.

- $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $\delta = ad - bc$ avec $c \neq 0$ et $\delta \neq 0$.
- $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} &\to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \\ x &\mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$
- $u = (u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ lorsqu'elle existe (ce n'est justement pas toujours le cas !)
- (ξ) l'équation : $\lambda = f(\lambda)$
- $E = \{u_0 \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \mid cu_n + d = 0\}$

Objectifs :

- Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle bien définie ?
- Exprimer u_n en fonction de n.
- Étudier la convergence de la suite (u_n).

Pour faciliter le travail, commençons par ce qui suit :

Quelques propriétés utiles et usuelles des suites homographiques

1. ***f* est une bijection :**

   Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Montrons : $\exists\,!\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ tel que $y = f(x)$

   La condition $y = f(x)$ s'écrit :
   $$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$
   $$ycx + yd = ax + b$$
   $$x(cy - a) = b - dy$$
   Or, $cy - a \neq 0$, d'où :
   $$x = \frac{-dy+b}{cy-a}$$

   Pour chaque y de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, il existe un unique antécédent, ce qui prouve la bijectivité de f.

   Le calcul ci-dessus permet également d'expliciter la bijection réciproque :
   $$\begin{aligned} g = f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} &\to \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \\ x &\mapsto \frac{-dx+b}{cx-a} \end{aligned}$$

2. **Étude de l'équation (ξ) : $\lambda = f(\lambda)$:**

   Cette équation du second degré s'écrit encore :
   $$c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$$
   Son discriminant Δ est :
   $$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = (d+a)^2 - 4ad + 4bc = (d+a)^2 - 4\delta$$

Remarquons au passage que, comme $\delta \neq 0$, on a : $(a + d)^2 \neq \Delta$.

Si $\Delta > 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 > 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet deux racines réelles distinctes :

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2c}$$

Si $\Delta = 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 = 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet une unique racine réelle :

$$\gamma = \frac{a-d}{2c}$$

Remarquons que dans ce cas, on a nécessairement : $a + d \neq 0$ puisque $\delta \neq 0$.

Si $\Delta < 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 < 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet deux racines complexes conjuguées :

$$\alpha = \frac{a-d+\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2c} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{\alpha}$$

3. **Propriétés des racines de (ξ) :**

Soit λ une racine de (ξ). On a donc : $f(\lambda) = \lambda$

Comme f est bijective : $f^{-1} \text{ o } f(\lambda) = f^{-1}(\lambda)$

$$\lambda = f^{-1}(\lambda)$$

On a donc : $\lambda = \dfrac{a\lambda+b}{c\lambda+d} = \dfrac{-d\lambda+b}{c\lambda-a}$

4. **Lien entre les racines de (ξ) et la suite u :**

Soit λ une racine de (ξ). Si $u_0 \neq \lambda$ alors, $u_n \neq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve : par récurrence. Supposons $u_0 \neq \lambda$. Considérons $\wp(n)$: " $u_n \neq \lambda$ " pour $n \in \mathbb{N}$.

- On a $\wp(0)$ par hypothèse.
- Supposons $\wp(n)$: $u_n \neq \lambda$

  Comme f est injective : $f(u_n) \neq f(\lambda)$

  C'est-à-dire : $u_{n+1} \neq \lambda$

  D'où $\wp(n + 1)$.

D'où le résultat annoncé.

5. **Accroissement moyen de f :**

Pour tous x et y de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ distincts :

$$f(x) - f(y) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{acxy+adx+bcy+bd-acxy-ady-bcx-bd}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}$$

D'où : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{\delta}{(cx+d)(cy+d)}$

Ces préliminaires étant faits, répondons maintenant à nos objectifs. En commençant par le deuxième, à savoir : **expliciter la suite u.**

CAS 1 : l'équation (ξ) admet deux racines distinctes α et β (dans ℝ ou ℂ)

- Si $u_0 = \alpha$ (resp. β) alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$ (resp. β) et c'est fini.
- Si $u_0 \in E$ alors la suite (u_n) ne sera plus définie au delà d'un certain rang, donc il n'y a rien à expliciter.
- Supposons désormais $u_0 \notin E \cup \{\alpha, \beta\}$.

Comme (voir 4) $u_n \neq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut poser : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

Remarquons également, que ayant supposé $\alpha \neq \beta$, on a : $v_n \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que la suite $v = (v_n)$ est géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{f(u_n) - f(\beta)} \overset{(5)}{=} \frac{\delta(u_n - \alpha)}{(cu_n + d)(c\alpha + d)} \times \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{\delta(u_n - \beta)} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} v_n$$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d} \overset{(2)}{=} \begin{cases} \dfrac{a + d - \sqrt{\Delta}}{a + d + \sqrt{\Delta}} \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont réelles} \\ \\ \dfrac{a + d - \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{a + d + \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}} \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont complexes} \end{cases}$

(Ces relations ont bien un sens car $(a + d)^2 - \Delta \neq 0$)

Remarquons que l'on a $q \neq 0$. (Sinon on aurait $v_1 = 0$ et donc $u_1 = \alpha$ ce qui est impossible car $u_0 \neq \alpha$)

Remarquons également que si q est complexe alors $|q| = 1$.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$v_n = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} q^n$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$u_n(v_n - 1) = \beta v_n - \alpha$$

D'où : $$u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$$

On a donc explicité la suite u dans le cas où l'équation (ξ) admet deux racines distinctes.

Avant d'étudier le CAS 2, répondons a nos deux autres objectifs :

La suite u sera non définie dès qu'il existe un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que : $u_k = -\dfrac{d}{c}$.

Pour de tels $k \in \mathbb{N}$, on a : $$v_k = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} q^k = \frac{u_k - \alpha}{u_k - \beta} = \frac{d + c\alpha}{d + c\beta} = q^{-1}$$

D'où : $$(u_0 - \alpha)q^{k+1} = (u_0 - \beta)$$
$$u_0(q^{k+1} - 1) = \alpha q^{k+1} - \beta$$

Et pour ces entiers k tels que $q^{k+1} \neq 1$: $$u_0 = \frac{\alpha q^{k+1} - \beta}{q^{k+1} - 1}$$

On conclut : $$E = \left\{ \frac{\alpha q^{k+1} - \beta}{q^{k+1} - 1} \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } q^{k+1} \neq 1 \right\}$$

En général, cet ensemble E est infini mais il y peut y avoir des exceptions lorsque α et β sont complexes.

Par exemple : $\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$

Déterminons E. On a ici, en appliquant ce qui précède :

$$\alpha = \mathbf{i} \text{ et } \beta = -\mathbf{i}$$

$$q = \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = \mathbf{i}$$

$$E = \left\{\frac{\mathbf{i}^{k+2}+\mathbf{i}}{\mathbf{i}^{k+1}-1}, k \in \mathbb{N} \text{ et } k \neq 3[4]\right\}$$

Or, $$\frac{\mathbf{i}^{k+2}+\mathbf{i}}{\mathbf{i}^{k+1}-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0[4] \\ 0 \text{ si } k = 1[4] \\ -1 \text{ si } k = 2[4] \end{cases}$$

Donc $$E = \{-1 ; 0 ; 1\}$$

La suite u est donc bien définie pour tout terme initial u_0 différent de -1, 0 ou 1.

Etudions maintenant la convergence de la suite u (notons qu'en cas de convergence, ce ne peut être que vers les points fixes α et β de f)

Cas réel ($\Delta > 0$) :

- Si $|q| < 1$ alors v converge vers 0 et donc u converge vers α.
- Si $|q| > 1$ alors $|v|$ diverge vers $+\infty$ et donc u converge vers β.
- Le cas $q = 1$ est exclu car d'après 2., $(a + d)^2 \neq \Delta$.

Cas complexe ($\Delta < 0$) :

Dans ce cas, la suite u diverge. En effet, elle n'a aucune chance de converger puisque f n'a pas de point fixe réel...

<u>CAS 2 : l'équation (ξ) admet une unique racine $\gamma \in \mathbb{R}$</u>

- Si $u_0 = \gamma$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \gamma$ et c'est fini.
- Si $u_0 \in E$ alors la suite (u_n) ne sera plus définie au delà d'un certain rang, donc il n'y a rien à expliciter.
- Supposons désormais $u_0 \notin E \cup \{\gamma\}$.

  Comme (voir 4) $u_n \neq \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut poser : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$

  Remarquons également que : $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

  Montrons que la suite $v = (v_n)$ est arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-\gamma} = \frac{cu_n+d}{au_n+b-\gamma(cu_n+d)} = \frac{cu_n+d}{au_n+b-\gamma cu_n-\gamma d} = \frac{cu_n+d}{(a-\gamma c)\left(u_n+\dfrac{b-\gamma d}{a-\gamma c}\right)} \overset{(3)}{=} \frac{cu_n+d}{(a-\gamma c)(u_n-\gamma)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_n-\gamma}\left(\frac{cu_n+d}{a-\gamma c}-1\right) = \frac{1}{u_n-\gamma}\left(\frac{cu_n+d-a+\gamma c}{a-\gamma c}\right)$$

Or, $d - a + \gamma c = d - a + \dfrac{a-d}{2} = \dfrac{d-a}{2}$ et $a - \gamma c = a - \dfrac{a-d}{2} = \dfrac{a+d}{2}$ ($\neq 0$ car $\gamma \neq \dfrac{c}{a}$)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}\left(\frac{cu_n + \dfrac{d-a}{2}}{\dfrac{a+d}{2}}\right) = \frac{1}{u_n-\gamma}\left(\frac{2cu_n + d - a}{a+d}\right) = \frac{1}{u_n-\gamma} \times 2c \times \left(\frac{u_n - \gamma}{a+d}\right) = \frac{2c}{a+d}$$

Donc la suite v est arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a+d}$

(Cette relation a bien un sens car $a + d \neq 0$ quand $\Delta = 0$)

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$v_n = \frac{1}{u_0 - \gamma} + nr$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$u_n v_n - \gamma v_n = 1$$

D'où : $$u_n = \frac{1 + \gamma v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + \gamma$$

On a donc explicité la suite u dans le cas où l'équation (ξ) admet une unique racine réelle.

La suite u sera non définie dès qu'il existe un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que : $u_k = -\dfrac{d}{c}$.

Pour de tels $k \in \mathbb{N}$, on a : $$v_k = \frac{1}{u_0 - \gamma} + nk = \frac{1}{u_k - \gamma} = \frac{-c}{d + c\gamma} = -r$$

D'où : $$\frac{1}{u_0 - \gamma} = -r - nk$$

Et pour ces entiers k tels que $r + nk \neq 0$: $$u_0 - \gamma = -\frac{1}{r + nk}$$

$$u_0 = \gamma - \frac{1}{r+nk}$$

On conclut : $$E = \left\{\gamma - \frac{1}{r+nk} \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } r + nk \neq 0\right\}$$

Précisons la convergence de la suite u :

Comme v diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, on déduit : u converge vers γ.