

Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

1. L'application  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

2.  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$  existe.

3. On a : 
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

**Démonstration**

1. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\varphi(x)| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Posons  $t = x - n\pi$  :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(t + n\pi)|}{t + n\pi} dt$$

On a :

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

D'où :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = \sum_{n=0}^{m-1} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

Et comme la série harmonique diverge, on en déduit que  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Cependant, une intégration par parties donne :

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[ \frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \psi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$$

(On a posé :  $u(x) = \frac{1}{x}$  ;  $v'(x) = \sin x$  et on a choisit  $v(x) = 1 - \cos x$ )

(On rappelle que l'application  $\delta : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$  se prolonge par continuité en 0 par  $\delta(0) = 0$ )

Or, l'application  $\psi : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  se prolonge par continuité en 0 par  $\psi(0) = \frac{1}{2}$  donc est localement

intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et comme : 
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |\psi(x)| \leq \frac{2}{x^2}$$

On en déduit que  $\psi$  est bien intégrable sur  $[1, +\infty[$  et donc (continuité sur  $[0, 1]$ ) sur  $\mathbb{R}_+$ , d'où :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \psi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Et comme  $\lim_{a \rightarrow +\infty} a\psi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \delta(a) = 0$ , on a bien :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

**Moralité :  $\varphi$  est non intégrable mais son intégrale impropre converge.**

### 3. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

#### Étape 1

On considère l'application  $f$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

Montrons que  $f$  se prolonge par continuité en 0 :

On a, pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  :

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^3)} = \left(-\frac{x}{6} + o(x^2)\right) (1 + o(x)) = -\frac{x}{6} + o(x^2)$$

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc  $f$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .

#### Remarques :

- on a alors  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6} + o(x)$ , d'où l'on déduit que  $f$  est dérivable en 0 avec  $f'(0) = -\frac{1}{6}$ .

- En écrivant  $f(x) = \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$ , on peut montrer à l'aide du quotient de deux séries entières que le

prolongement de  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Étape 2

On pose :  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$

Calculons  $J_n$

Précisons au préalable que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2n+1$ , donc  $J_n$  est bien définie.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sin[(2n+1)x] - \sin[(2n-1)x] = 2\cos(2nx)\sin x$

D'où :  $J_n - J_{n-1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) dx = 0$

On en déduit que la suite  $(J_n)$  est constante et :

$$J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$$

Autre méthode plus longue : on calcule le noyau de Dirichlet :

Pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$$

Posons  $t = 2x$ , ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  :

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{2ikx} \right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1$$

Et en intégrant entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = 2 \sum_{k=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx) dx - \frac{\pi}{2}$$

Or, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx) dx = \left[ \frac{\sin(2kx)}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(k\pi)}{2k} = 0$$

D'où :

$$J_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

### Étape 3

On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x} dx$$

Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Tout comme  $J_n$ ,  $K_n$  est bien définie. Posons  $t = (2n+1)x$ . Ainsi :

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$$

On a vu que l'intégrale ci-dessus admet une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

### Étape 4 : lemme de Lebesgue pour les applications continues

Supposons  $f = 1$  sur  $[a, b]$ . Alors, pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons  $f$  en escalier sur  $[a, b]$ . Alors, si  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  est une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ , il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  telles que :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{]a_{i-1}, a_i[}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} e^{i\lambda t} dt$$

D'où, pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons enfin  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

Comme l'ensemble des fonctions en escalier de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$  est dense dans l'ensemble des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$  pour la norme uniforme, il existe  $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  en escalier telle que :

$$\|f - e\|_\infty \leq \varepsilon$$

Écrivons :

$$f = (f - e) + e$$

Or, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} (f(t) - e(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq \|f - e\|_\infty (b - a) \leq \varepsilon (b - a)$$

Et d'autre part, comme  $e$  est en escalier, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

C'est-à-dire :  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \leq \varepsilon)$

On en déduit que pour tout  $\lambda$  tel que  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ , on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \varepsilon (b - a) + \varepsilon$$

Ce qui signifie bien :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Remarques :

- Ce raisonnement fonctionne encore si on suppose  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ .
- Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , une simple intégration par parties suffit à prouver le lemme.
- Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , le passage à la partie réelle et à la partie imaginaire donne :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$$

Étape 5 : conclusion

On a : 
$$K_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin[(2n+1)x] dx$$

Comme  $f$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a d'après le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n - J_n) = 0$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$