

## FORMULE D'INVERSION DE PASCAL

Soient  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$  des familles d'éléments d'un anneau commutatif  $A$  tels que :

$$a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Alors :

$$b_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Preuve par récurrence :

On considère la propriété  $\wp(p)$  suivante définie pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\wp(p) : b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket$$

- D'après la relation  $a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k$  particularisée avec  $p = 0$ , on obtient :  $a_0 = b_0$ . D'où  $\wp(0)$ .
- Montrons que :  $\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \wp(p) \Rightarrow \wp(p+1)$

Soit  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Supposons donc :  $b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket$

Nous savons que :

$$a_{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j b_j = \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j b_j + b_{p+1}$$

D'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j b_j$$

Et d'après notre hypothèse :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k$$

Nous pouvons modifier l'ordre des sommations (tenant compte des conditions :  $0 \leq k \leq j \leq p$ ) :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p \sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1}^j C_j^k a_k$$

Or :  $C_{p+1}^j C_j^k = \frac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!} \times \frac{j!}{k!(j-k)!} = \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} \times \frac{(p+1-k)!}{(p+1-j)!(j-k)!} = C_{p+1}^k C_{p+1-k}^{p+1-j}$

D'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1-k}^{p+1-j}$$

Or, par translation d'indice de sommation :

$$\sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1-k}^{p+1-j} = \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j C_{p+1-k}^{p+1-k-j}$$

Et comme :  $C_{p+1-k}^{p+1-k-j} = C_{p+1-k}^j$ , on déduit :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j$$

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \left( \sum_{j=0}^{p+1-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j - (-1)^{p+1-k} \right)$$

Et d'après la formule du binôme :  $\sum_{j=0}^{p+1-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j = 0$  d'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} + \sum_{k=0}^p (-1)^{p+1-k} C_{p+1}^k a_k$$

$$b_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} C_{p+1}^k a_k$$

On a donc :  $b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket$

C'est-à-dire  $\wp(p+1)$ .

On en déduit, d'après le principe de récurrence :

$$\wp(p), \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Et en particulier  $\wp(n)$  :  $b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Ce qui achève la démonstration.

Preuve en inversant la matrice des coefficients binomiaux :

Notons  $A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  et  $B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ . La relation  $a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  se traduit alors matriciellement par :

$$A_n = M_n B_n \text{ avec } M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Les matrices  $M_n$  sont triangulaires, de déterminant 1, donc inversibles. En inversant  $M_n$ , on déduira une expression des  $b_p$  ( $0 \leq p \leq n$ ) en fonction des  $a_p$  ( $0 \leq p \leq n$ ). Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = M_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix}$$

Pour déterminer  $M_n^{-1}$ , on décompose  $X^p$  ( $0 \leq p \leq n$ ) dans la base  $(1, (1+X), (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$  :

Pour cela, il suffit d'écrire :

$$X^p = (1+X-1)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k (-1)^{p-k} (1+X)^k$$

D'où :

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^n C_n^0 & (-1)^{n-1} C_n^1 & (-1)^{n-2} C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

En conséquence :

$$b_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Exemple : démontrer :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k 2^k = 1$$

Application 1 : nombre de surjections d'un ensemble de cardinal  $n$  sur un ensemble de cardinal  $p$ .

Soit  $X$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Y$  un ensemble de cardinal  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $S(n, p)$  le nombre de surjections de  $X$  sur  $Y$ .

Recherchons une expression de  $S(n, p)$ .

Pour cela, dénombrons de deux façons différentes le nombre d'applications  $f$  de  $X$  dans  $Y$ .

Soit  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ .

Pour chacun des  $n$  éléments de  $X$ , nous pouvons associer l'un des  $p$  éléments de  $Y$ . D'après le principe multiplicatif, nous avons donc  $p^n$  façons de construire  $f$ .

Nous pouvons dénombrer différemment : on sait que  $f$  définit une surjection de  $X$  sur  $f(X)$ . Notons  $k$  le cardinal de  $f(X)$ . On a donc :  $1 \leq k \leq p$ . Nous avons  $C_p^k$  façons de choisir les  $k$  éléments de  $f(X)$  parmi les  $p$  éléments de  $Y$ . Et, avec nos notations, nous avons  $S(n, k)$  façons de choisir une surjection de  $X$  dans un ensemble de cardinal  $k$ . En sommant, pour  $1 \leq k \leq p$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^p C_p^k S(n, k) \text{ applications de } X \text{ dans } Y.$$

Bilan :

$$p^n = \sum_{k=1}^p C_p^k S(n, k)$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, on déduit :

$$S(n, p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^n$$

Application 2 : nombre de dérangements  $d_n$  d'un ensemble  $X$  de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . (Est appelé dérangement de  $X$  toute bijection de  $X$  n'ayant aucun point fixe)

Soit  $B_k(X)$  l'ensemble des bijections de  $X$  ayant  $k$  points fixes (pour  $0 \leq k \leq n$ )

On a :

$$\text{Card}(B_k(X)) = C_n^{n-k} d_{n-k}$$

En effet, une bijection de  $X$  ayant  $k$  points fixes dérange  $n - k$  éléments de  $X$ . Or, il y a  $C_n^{n-k}$  façons de choisir les  $n - k$  éléments dérangés et  $d_{n-k}$  dérangements de l'ensemble de ces  $n - k$  éléments.

En sommant, pour  $k = 0$  à  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n \text{Card}(B_k(X)) = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k$$

En outre,

$$\sum_{k=0}^n \text{Card}(B_k(X)) = n!$$

On a donc :

$$n! = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k$$

Et d'après la formule d'inversion de Pascal :

$$d_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ce résultat a pour conséquence un curieux théorème dit "des chapeaux" (d'autres versions existent) :

$n$  invités laissent leur chapeau au vestiaire et repartent en prenant un chapeau au hasard. La probabilité  $p_n$  qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas est :

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Par exemple,  $p_4 = \frac{3}{8}$ . (On peut retrouver ce résultat à l'aide d'un arbre)

Et lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $p_n$  tend vers  $\frac{1}{e}$ .