THÉORÈME DU RANG - FORMULE DE GRASSMANN

Théorème du rang

Soit E un e.v. de dimension finie et E' un e.v. de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$

1) Tout supplémentaire de Ker f est **isomorphe** à Im f.
2) dim E = dim Ker f + rg f

On rappelle que, par définition : rg f = dim Im f

Démonstration :

Idée de la démonstration : On restreint f à un supplémentaire U de Ker f et on montre que l'on induit un isomorphisme de U sur Im f.

1) Soit U un supplémentaire de Ker f :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus U \text{ (et donc } \operatorname{Ker} f \cap U = \{0\})$$

Considérons l'application linéaire $g = f\Big|_U^{\operatorname{Im}(f)} : U \longrightarrow \operatorname{Im} f$.

Montrons que l'application linéaire ainsi construite est un **isomorphisme** d'e.v.

Montrons que g est une surjection de U sur Im f :

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors : $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Écrivons : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in U$

Ainsi, il apparaît : $y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_2)$

Donc y admet un antécédent, par f, **dans** $\boldsymbol{U}$ (à savoir x_2).

Donc y admet un antécédent par g. Donc g est bien une surjection de U sur Im f.

Montrons que g est injective :

Soient $x, y \in U$. Supposons $g(x) = g(y)$

Alors, par linéarité de g : $x - y \in \operatorname{Ker} g$

Mais g est une restriction de f donc : $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$

Donc : $x - y \in \operatorname{Ker} f$

Et comme $\operatorname{Ker} f \cap U = \{0\}$, on a : $x = y$

Donc g est injective.

Bilan : g est un isomorphisme d'e.v., ce qui prouve 1).

2) Soit U un supplémentaire de Ker f : $E = \operatorname{Ker} f \oplus U$

D'après un corollaire précédent : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim U$

Et en vertu de ce qui précède ($\dim U = \dim \operatorname{Im} f$), il vient :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

On a prouvé le théorème du rang.

Formule de Grassmann

F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E.

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rl} \varphi : F \times G & \to E \\ (f, g) & \mapsto f + g \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \psi : F \cap G & \to F \times G \\ f & \mapsto (f, -f) \end{array}$$

1. Démontrer que Ker $\varphi \cong F \cap G$.
2. En déduire une démonstration de la relation :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1. Ker $\varphi = \{(f, g) \in E \times F$ tels que $f + g = 0\} = \mathrm{Im}\ \psi$

   De plus ψ est injective, donc induit un isomorphisme sur son image. Donc Ker $\varphi \cong F \cap G$.

2. En outre, Im $\varphi = F + G$.

   Appliquons le théorème du rang à φ, il vient :

$$\dim(F \times G) = \dim \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim(F \cap G) + \dim(F + G).$$

   Et comme $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on obtient la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Remarque : autre démonstration

On sait que $F \cap G$ admet au moins un supplémentaire dans F.

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : $F = F' \oplus (F \cap G)$

On a, par conséquent : $$\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G) \qquad (1)$$

Montrons que : $$F + G = F' \oplus G$$

Idée de la démonstration : Considérer un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F. Puis vérifier que F' est de dimension "convenable"

D'une part, comme $F \cap G \subset G$: $$F + G = F' + (F \cap G) + G = F' + G$$

D'autre part : $$F' \cap G \overset{F' \subset F}{=} F' \cap F \cap G \overset{F = F' \oplus (F \cap G)}{=} \{0\}$$

On a donc bien : $$F + G = F' \oplus G$$

On en déduit : $$\dim F' = \dim(F + G) - \dim G \qquad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$