

RÈGLE DE DESCARTES

Théorème :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme à coefficients réels de degré n :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Alors les éventuelles racines réelles de P sont dans l'intervalle $[-R, R]$ où $R = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{|a_k|}{|a_n|} \right)$

Démonstration

Procédons par contraposition et montrons : $|x| > R \Rightarrow P(x) \neq 0$

Posons $A = \max_{0 \leq k \leq n-1} (|a_k|)$, ainsi : $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$

Comme nous avons supposé $|x| > R$, on a : $|x| > 1 + \frac{A}{|a_n|}$

Puisque $A \geq 0$, on a donc *a fortiori* : $|x| > 1$

D'où, par l'inégalité triangulaire : $|P(x) - a_n x^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq A \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k$

Or, comme $|x| > 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} |x|^k = \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} = \frac{|x|^n}{|x| - 1} - \frac{1}{|x| - 1} < \frac{|x|^n}{|x| - 1}$

D'où $|P(x) - a_n x^n| < \frac{A |x|^n}{|x| - 1}$

Et comme $|x| - 1 > \frac{A}{|a_n|}$: $|P(x) - a_n x^n| < |a_n x^n|$

Et, d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$| |P(x)| - |a_n x^n| | \leq |P(x) - a_n x^n| < |a_n x^n|$$

En particulier : $|a_n x^n| - |P(x)| < |a_n x^n|$

$$|P(x)| > 0$$

C'est-à-dire : $P(x) \neq 0$

On a montré : $|x| > R \Rightarrow P(x) \neq 0$

Par contraposition : $P(x) = 0 \Rightarrow x \in [-R, R]$

Remarque : ce théorème s'étend aux polynômes à coefficients complexes : les racines complexes sont toutes dans le disque fermé de centre O et de rayon R .