

## THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit  $I$  un intervalle. Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$ .

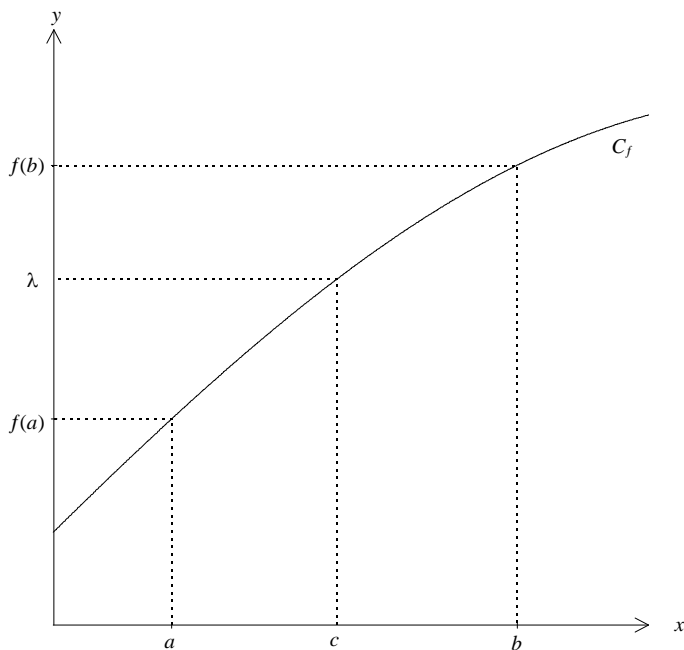
Soit  $f$  une application continue sur l'intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\lambda$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

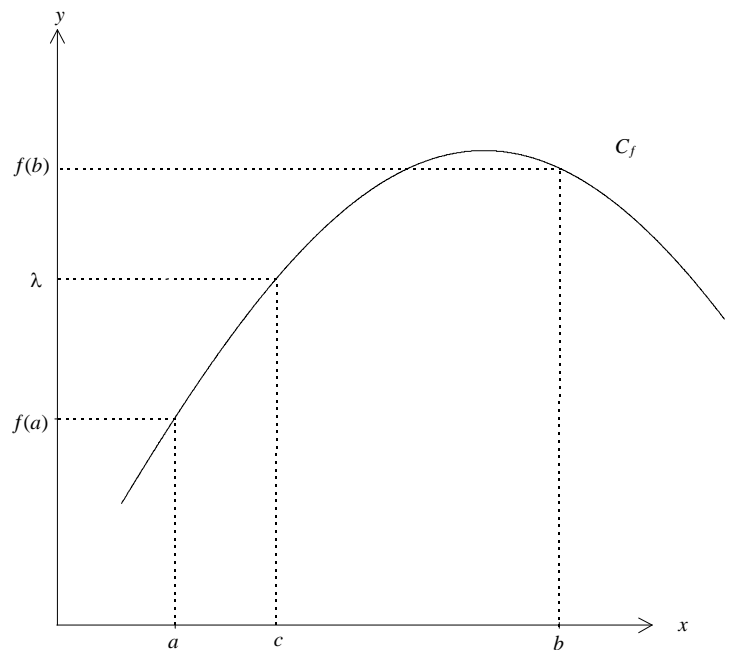
Il existe  $c$  dans  $[a, b]$  tel que :  $f(c) = \lambda$ .

Illustrations

Cas d'une fonction monotone



Cas d'une fonction non monotone



Démonstration 1 à l'aide de la borne supérieure :

Lemme 1 : propriété de la borne supérieure

Soit  $X$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . Soit  $c$  sa borne supérieure.

Il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $c$ .

Démonstration du lemme 1 :

Comme  $c$  est la borne supérieure de  $X$ , il est le plus petit des majorants de  $X$  :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in X \text{ tel que : } c - \varepsilon < x \leq c$$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in X \text{ tel que : } c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$

On en déduit (théorème des gendarmes) que la suite  $(x_n)$  converge vers  $c$ .

## Lemme 2 : suites et application continue

Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $X$  convergeant vers un réel  $\ell \in X$ .

Soit  $f$  une application continue en  $\ell$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

La suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .

### Démonstration du lemme 2 :

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, comme  $f$  est continue en  $\ell$ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } (|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

Mais la suite  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ . Donc pour ce réel  $\eta$  ci-dessus, on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - \ell| < \eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(\ell)| < \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .

### Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires :

Déjà, si  $f(a) = f(b)$  alors nécessairement  $\lambda = f(a) = f(b)$  et le théorème est vrai en choisissant  $c = a = b$ .

Dans toute la suite, on peut donc supposer :  $f(a) < f(b)$ . (Quitte à poser  $g = -f$  si  $f(a) > f(b)$ ).

Notons :  $X = \{x \in [a, b] \text{ tels que } f(x) \leq \lambda\}$

Cet ensemble  $X$  est **non vide**. En effet,  $f(a) \leq \lambda$ , donc  $a \in X$ .

Cet ensemble  $X$  est **majoré** par  $b$  (puisque  $X$  est un sous ensemble de  $[a, b]$ ).

Donc  $X$  admet une **borne supérieure**  $c$ . (Et  $c \in [a, b]$ )

Montrons que  $f(c) \leq \lambda$  :

Comme  $c = \sup X$ , il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $c$ . (Lemme 1)

Comme les  $x_n$  sont dans  $X$ , on a :  $f(x_n) \leq \lambda$

Or,  $f$  est continue en  $c$ , donc par passage à la limite (Lemme 2) :

$$f(c) \leq \lambda$$

Montrons que  $f(c) \geq \lambda$  :

Déjà, si  $c = b$  alors  $f(c) = f(b) \geq \lambda$  auquel cas la démonstration s'achève.

Supposons désormais que  $c < b$ .

Comme  $c = \sup X$ , on a :  $\forall x \in ]c, b], x \notin X$ , c'est-à-dire  $f(x) > \lambda$

Soit  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $]c, b]$  qui converge vers  $c$  (Existe d'après le lemme 1). On a donc :

$$f(y_n) > \lambda$$

Or,  $f$  est continue en  $c$ , donc par passage à la limite (Lemme 2) :

$$f(c) \geq \lambda$$

Bilan : on a donc  $f(c) = \lambda$ , ce qui achève la démonstration.

Démonstration 2 à l'aide du théorème des segments emboîtés :

Supposons  $f(a) < f(b)$ . (Quitte à poser  $g = -f$  sinon)

Soit  $u$  le milieu de  $[a, b]$ .

Notons  $a_1 = a$  et  $b_1 = u$  si  $f(u) \geq \lambda$ .

Notons  $a_1 = u$  et  $b_1 = b$  si  $f(u) < \lambda$ .

Ainsi, on a toujours :  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$ .

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $c$  leur limite commune. Montrons que  $f(c) = \lambda$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$

Par passage à la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq \lambda \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Or,  $f$  est continue, donc :  $f(c) \leq \lambda \leq f(c)$

Donc  $f(c) = \lambda$ .

Attention : le théorème ne s'applique pas si  $a$  et  $b \in \bar{I}$ . Considérer, par exemple, la fonction "partie entière"  $E$  qui est continue sur  $[0, 1[$ . On a  $E(0) = 0$  et  $E(1) = 1$ . Mais il n'existe pas de réel  $c$  tel que  $E(c) = \frac{1}{2}$  ...

Corollaire *Image d'un intervalle par une application continue*

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f(I)$  est un intervalle.

Démonstration : on utilise ici le fait que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les **convexes** de  $\mathbb{R}$ .

Soient  $y_1$  et  $y_2$  dans  $f(I)$  avec  $y_1 \leq y_2$ . Il s'agit de montrer tout élément  $\lambda$  de  $[y_1, y_2]$  est élément de  $f(I)$ .

Comme  $y_1$  et  $y_2$  sont dans  $f(I)$ , il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $f(a) = y_1$  et  $f(b) = y_2$ .

Comme  $I$  est un intervalle, on a  $[a, b] \subset I$ .

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$  (puisque  $[a, b] \subset I$ ), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2], \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = \lambda.$$

D'où :  $\lambda \in f(I)$ .

Donc  $f(I)$  est bien un intervalle.

Remarque : on peut se demander si la condition "l'image, par  $f$ , de tout intervalle est un intervalle" entraîne la condition " $f$  continue". C'est faux. Considérer l'application  $f$  définie, sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{où } \lambda \in [-1 ; 1]).$$

$f$  est non continue en 0, et pourtant, pour tout intervalle  $I$  contenant 0, on a  $f(I) = [-1 ; 1]$ .

Par contre, c'est vrai si  $f$  est monotone, voir ce document :

[http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/agreg\\_fichiers/connexes.pdf](http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/agreg_fichiers/connexes.pdf)