

$$\text{Autour de } \zeta(2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## I. Par la méthode de Wallis

1. On pose  $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ .
  - a) Calculer  $C_0$  et  $C_1$ .
  - b) Pour  $n \geq 2$ , exprimer  $C_n$  en fonction de  $C_{n-2}$ .
  - c) En déduire les valeurs de  $C_{2n}$  et de  $C_{2n+1}$ .
  - d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}}$ .
  - e) En déduire :  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1}$
2. On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$  et  $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$ .
  - a) Démontrer que  $u_n \leq 2$  ( $\forall n \geq 1$ ). En déduire que  $(u_n)$  admet une limite  $\xi$ .
  - b) Pour tout  $n \geq 1$ , exprimer  $I_n$  en fonction de  $I_{n-1}$ .
  - c) En déduire que  $\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi^6}{6} - u_n \right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n$ .
  - d) Démontrer que  $I_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1}$  et en déduire que  $\xi = \frac{\pi^2}{6}$ .

## II. Par le lemme de Riemann-Lebesgue

Le lemme : Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\lambda$  un réel.

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

1. Démontrer le lemme pour  $f$  de classe  $C^1$ . (On pourra intégrer par parties)
2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\int_0^{\pi} (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$
3. Démontrer que  $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = \text{Re} \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$  pour tout  $t \neq 2k\pi$ . En déduire que :
 
$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_0^{\pi} \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} (e^{i(n+1)t} - e^{it}) dt$$
4. Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $]0, \pi]$  par  $f(t) = \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1}$  se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ .
5. À l'aide du lemme, déduire des questions précédentes que :  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### III. Par la méthode de Holme et Papadimitriou

1. Démontrer que pour tous  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\cotan^2\theta)^{n-j}$$

[On pourra utiliser la formule de Moivre]

2. On considère, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $P_n$  défini par :

$$P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}$$

Démontrer que les  $n$  racines de  $P_n$  sont les réels :  $\alpha_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

3. Montrer que :  $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

4. Démontrer que, pour tout  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a :  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ . En déduire :  $\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$ .

5. Démontrer que :  $\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$ .

6. En déduire :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Remarque : la méthode ci-dessus peut se généraliser afin de calculer  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

### IV. À l'aide des séries de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique, impaire telle que :  $\forall t \in ]0, \pi[, f(t) = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0$

1. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques)  $a_n$  et  $b_n$  définis, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

2. Démontrer que la série  $S_p(f)$  de Fourier de  $f$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$S_p(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. En déduire :  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$

On peut aussi retrouver ce résultat à l'aide du DSE de l'Arctan.

4. À l'aide de la formule de Parseval, démontrer que la série  $\sum_{p \geq 0} \left( \frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2$  converge. En déduire :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. En déduire :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**I. Par la méthode de Wallis**

---

1. On pose  $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ .

a)  $C_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $C_1 = 1$ .

b)  $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{n-1}(t) dt$

En intégrant par parties ( $u'(t) = \cos(t)$  ;  $v(t) = \cos^{n-1}(t)$ ), il vient :

$$C_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{n-2}(t) dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-2}(t) dt = (n-1)(C_{n-2} - C_n)$$

D'où  $C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$ .

c) On en déduit (récurrence) que :  $C_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$  et  $C_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} C_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ .

d) On a déjà :  $1 \leq \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}}$ . En outre,  $\frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} \leq \frac{C_{2n-1}}{C_{2n+1}} = \frac{(2n-2)!!(2n+1)!!}{(2n-1)!!(2n)!!} = \frac{2n+1}{2n}$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} = 1$ .

e)  $\frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!(2n)!!} \frac{\pi}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2$ , d'où  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1}$ .

2. On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$  et  $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$ .

a) Pour  $p \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p(p-1)} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$  donc  $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ , d'où  $u_n \leq 2$  ( $\forall n \geq 1$ ).

En outre,  $(u_n)$  est croissante donc admet une limite  $\xi \leq 2$ .

b)  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) \cos^{2n-1}(t) dt = -\frac{1}{n} C_n + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t) dt$

D'où  $I_n = -\frac{1}{n} C_n + (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$  et par suite,  $I_n = -\frac{1}{n^2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{4} + \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$ .

c) On en déduit (récurrence) que  $\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi^6}{6} - u_n \right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n$ .

d) Comme, sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ , il vient :  $I_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^{2n}(t) dt \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1}$ .

D'où  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$  d'où  $\xi = \frac{\pi^2}{6}$ .

## II. Par le lemme de Riemann-Lebesgue

1. Les applications  $f$  et  $t \mapsto e^{it}$  étant de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \left[ f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} f'(t) dt = \frac{1}{i\lambda} \left[ f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right]$$

D'où :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[ |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Notons  $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$  (existe car, par hypothèse,  $f'$  est continue sur le compact  $[a, b]$ )

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[ |f(b)| + |f(a)| + (b-a)M \right]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

2. Les fonctions considérées étant de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ , on a, à l'aide d'intégrations par parties :

$$I_n = \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \left[ (at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) \sin(nt) dt$$

$$I_n = \frac{1}{n} \left\{ \left[ (2at + b) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2a}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt \right\} = \frac{(2a\pi + b)(-1)^n - b}{n^2}$$

La condition  $I_n = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}^*$  s'écrit encore :  $(2a\pi + b)(-1)^n - b = 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $n$  est pair, on obtient :  $a = \frac{1}{2\pi}$ . Si  $n$  est impair, on obtient :  $b = -1$ .

Bilan : on donc :  $\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ .

3. Comme  $t \neq 2k\pi$  on a :  $\sum_{p=1}^n e^{ipt} = \frac{e^{it}(1 - e^{int})}{1 - e^{it}} = \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$  (somme de termes d'une suite géométrique)

En passant à la partie réelle, on obtient :  $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = \operatorname{Re} \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$

En utilisant la question 2, on a :  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \cos(pt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \sum_{p=1}^n \cos(pt) dt$

Et d'après ce qui précède :  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} (e^{i(n+1)t} - e^{it}) dt$ .

4. La fonction  $t \mapsto e^{it}$  est dérivable en 0. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it} - 1}{t} = i$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} = 2\pi i$$

La fonction  $f$  admet un prolongement continu en 0.

Pour tout  $t \in ]0, \pi[$ , on a :

$$f'(t) = \frac{(2t-2\pi)(e^{it} - 1) - (t^2 - 2\pi t)ie^{it}}{(e^{it} - 1)^2}$$

Au voisinage de 0, on a :

$$f'(t) = \frac{(2t-2\pi)(it - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) - (t^2 - 2\pi t)i(1 + it + o(t))}{(it + o(t))^2}$$

En développant puis simplifiant :

$$f'(t) = \frac{\mathbf{i}t^2 - \pi t^2 + o(t^2)}{-t^2 + o(t^2)}$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \pi - \mathbf{i}$$

La fonction  $f$  se prolonge bien en une fonction de classe  $C^1$  en 0.

5. D'après le lemme de Lebesgue, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)t} dt = 0$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} dt$$

Or,  $\operatorname{Re} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} = \frac{1}{2}$  d'où :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) dt = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} - \pi^3 \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

### III. Par la méthode de Holme et Papadimitriou

1. D'après la formule de Moivre et la formule du binôme, pour tout  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\cos(2n+1)\theta + \mathbf{i} \sin(2n+1)\theta = (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \mathbf{i}^k \sin^k \theta \cos^{2n+1-k} \theta$$

Les imaginaires sont obtenus en ne gardant, dans la somme, que les entiers  $k$  impairs, c'est-à-dire de la forme  $k = 2j + 1$  avec  $0 \leq j \leq n$  :

$$\mathbf{i} \sin(2n+1)\theta = \sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j+1} \mathbf{i}^{2j+1} \sin^{2j+1} \theta \cos^{2n-2j} \theta$$

Or,  $\mathbf{i}^{2j+1} = \mathbf{i} \times \mathbf{i}^{2j} = \mathbf{i} \times (-1)^j$ .

En outre :

$$\sin^{2j+1} \theta \cos^{2n-2j} \theta = \sin^{2n+1} \theta \sin^{2j-2n} \theta \cos^{2n-2j} \theta = \sin^{2n+1} \theta (\cotan^2 \theta)^{n-j}$$

D'où, en passant à la partie imaginaire :

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1} \theta \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\cotan^2 \theta)^{n-j}$$

2. Le polynôme  $P_n$  est de degré  $n$  donc possède au plus  $n$  racines.

Les réels  $\frac{k\pi}{2n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont éléments de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , donc  $\sin \frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$  et les nombres  $\alpha_k$  sont bien définis.

D'autre part, la fonction cotan est continue, décroissante et positive sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Il en va donc de même de la

fonction cotan qui induit une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  dans  $]0, +\infty[$ .

Donc les réels  $\alpha_k$  sont distincts.

D'après la question 1, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$P_n(\alpha_k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} \left( \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)^{n-j} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1} \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)} = 0$$

Les  $n$  racines de  $P_n$  sont bien les réels :  $\alpha_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

3. D'après les formules de Newton, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

En appliquant ce résultat au polynôme  $P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}$ , on a :

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{C_{2n+1}^3}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

4. Il suffit d'étudier les variations des fonctions  $\varphi : \theta \mapsto \theta - \sin \theta$  et  $\psi : \theta \mapsto \tan \theta - \theta$ . On constate que ces deux fonctions sont strictement croissantes sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  ( $\varphi'(\theta) = 1 - \cos \theta$  et  $\psi'(\theta) = \tan^2 \theta$ ). Et comme  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ , on en déduit que ces fonctions sont strictement positives sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

D'où l'encadrement :  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$  pour tout  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

En inversant cet encadrement (la fonction "inverse" étant strictement décroissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ), on obtient :

$$\frac{1}{\tan \theta} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin \theta}$$

Puis, en élevant au carré ( $t \mapsto t^2$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ) :

$$\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$$

5. Avec  $\theta = \frac{k\pi}{2n+1} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , l'encadrement ci-dessus devient :

$$\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} < 1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Et en sommant pour  $k$  allant de 1 à  $n$  :

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Et d'après la question 3 :

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n(n+2)}{3}$$

D'où :

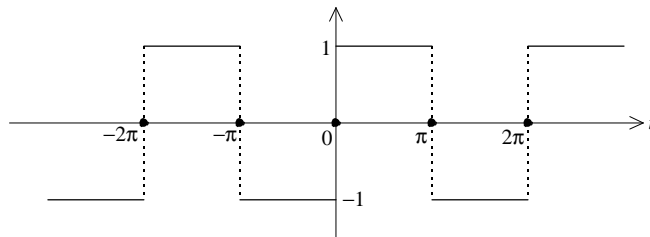
$$\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

6. En appliquant le théorème des "gendarmes", on obtient immédiatement :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Remarque : la méthode ci-dessus peut se généraliser afin de calculer  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

#### IV. À l'aide des séries de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique, impaire telle que :  $\forall t \in ]0, \pi[, f(t) = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n\pi) = 0$



1. Les coefficients de Fourier (trigonométriques)  $a_n$  et  $b_n$  sont, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0 \text{ car } f \text{ est impaire}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{2}{n\pi} [\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$

On a donc, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $b_{2p} = 0$  et  $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$

2. La fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux et égale à sa régularisée. D'après le théorème de Dirichlet, la série  $S_p(f)$  de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Et on a alors :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t)$$

3. En particulier pour  $t = \frac{\pi}{2}$  :  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$

On peut aussi retrouver ce résultat à l'aide du DSE de l'Arctan.

Or,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , d'où :  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$

4. Puisque  $f$  est continue par morceaux et égale à sa régularisée, d'après la formule de Parseval, la série de terme général  $(a_n^2 + b_n^2)$  converge et :  $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$ . D'où :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p+1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = 1$$

On a donc bien :  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

5. Les séries de terme général  $\frac{1}{(2p)^2}$  et  $\frac{1}{(2p+1)^2}$  sont convergentes, donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

D'où :  $\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque : la méthode ci-dessus permet de calculer facilement :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .